OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1897. Nr. 4.

Mémoire sur les équations différentielles linéaires, intégrables à l'aide de fonctions d'une nature spéciale.

Par

E.-S. Schou.

Introduction.

Dans ce mémoire je considérerai les équations linéaires et homogènes dont les intégrales particulières sont des fonctions construites au moyen d'un nombre fini de superpositions de fonctions appartenant aux deux espèces suivantes:

1) fonctions algébriques d'un nombre quelconque de variables. Une telle fonction z est définie par une équation de la forme

$$A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_{n-1} z + A_n = 0,$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont des fonctions rationnelles des variables.

2) fonctions θ définies par des équations différentielles de la forme

$$\varphi(\theta)\, d\theta = \psi(v)\, dv,$$

où $\varphi(\theta)$ et $\psi(v)$ sont des fonctions algébriques de u et de v respectivement.

Quant aux coefficients des équations différentielles linéaires auxquelles doivent satisfaire ces fonctions, je commence par supposer qu'ils soient algébriques; mais les résultats obtenus pour cette classe d'équations s'étendent d'eux mêmes aux équations les plus générales dont les coefficients sont des fonctions analytiques arbitraires.

Dans un mémoire inséré aux «Göttinger Nachrichten, 1878» et intitulé: «Beweis eines Lehrsatzes betreffend die Integration algebraischer Differentialausdrücke beziehungsweise algebraischer Differentialgleichungen unter geschlossener Form», M. Julius Petersen a donné un théorème qui m'a conduit au principe qui forme la base de la solution.

Je commence par chercher la forme des intégrales particulières, et je suis parvenu à la solution complète que voici:

Si les coefficients de l'équation linéaire proposée sont des fonctions algébriques de x et des fonctions arbitraires $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_p(x)$, il faut et il suffit que les intégrales puissent se partager en groupes, les intégrales d'un même groupe étant:

$$\begin{aligned} u_1 &= e^{T_1}, \\ u_2 &= T_2 e^{T_1}, \\ u_3 &= \left(T_3 + \tfrac{1}{2!} T_2^2\right) e^{T_1}, \\ u_4 &= \left(T_4 + T_2 T_3 + \tfrac{1}{3!} T_2^3\right) e^{T_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

où les T sont des intégrales abéliennes dont les arguments sont des fonctions algébriques de x, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_p(x)$.

La forme une fois obtenue, on passe à la détermination de la nature des irrationnalités algébriques qui entrent dans les intégrales abéliennes T. Il semble que cette question soit très difficile: aussi n'en ai je trouvé la solution que dans deux cas spéciaux qui se rapportent aux équations d'ordre n. Les difficultés proviennent de ce que les fonctions T et e^T peuvent être algébriques en x, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_p(x)$. Les résultats auxquels je suis parvenu suffisent pour l'équation du second ordre, abstraction faite des cas où l'intégrale générale est fonction algébrique des coefficients. En effet j'ai démontré la proposition suivante:

Si l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = P \cdot u, \quad (1)$$

P étant une fonction rationnelle de x, est intégrable par des fonctions appartenant à la catégorie en question, les intégrales ont une des deux formes suivantes:

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi}} e^{\int \varphi dx}, \quad \frac{1}{\sqrt{\varphi}} e^{-\int \varphi dx}, \quad (2\text{a})$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \int \varphi dx, \quad (2\text{b})$$

φ étant dans le premier cas égal à la racine carrée d'une fonction rationnelle et dans le second à une racine quelconque d'une fonction rationnelle. Si l'équation proposée n'a qu'une seule intégrale particulière appartenant à notre catégorie, il faut qu'elle ait la forme

$$e^{\int \varphi dx}, \quad (3)$$

φ étant une fonction rationnelle.

Si P est fonction rationnelle de x et des fonctions $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_p(x)$, les formes des intégrales seront les mêmes, mais les arguments des fonctions $\int \varphi dx$ et φ seront des fonctions rationnelles de x, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_p(x)$.

Maintenant il n'est pas difficile de démontrer la proposition suivante:

Pour que l'intégrale générale de (1) appartienne à notre catégorie, il faut et il suffit que l'équation linéaire du troisième ordre dont les intégrales particulières sont égales au produit de deux intégrales de l'équation proposée soit satisfaite par une racine d'une fonction rationnelle de x (ou de x, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_p(x)$ dans le cas général).

Pour la forme (3) on a la condition nécessaire: Il faut que l'équation proposée ait une intégrale dont la dérivée logarithmique est rationnelle en x (ou en x, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_p(x)$).

Par ces propositions la question posée est complètement résolue pour les équations du second ordre. Néanmoins je fais une étude approfondie des intégrales des formes (2 a) et (2 b) pour bien établir comment la fonction φ dépend du coefficient P.

A la fin du mémoire je donne quelques applications de la théorie générale.

Les équations de la forme:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = P \cdot y,$$

P étant fonction rationnelle d'une fonction elliptique $\varphi(z)$, prendront la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = 0,$$

p_1 et p_2 étant des fonctions rationnelles de x, si $\varphi(z)$ est pris pour variable indépendante; donc les résultats obtenus pour le cas de P rationnel sont applicables aux équations de cette espèce. Je prends la liberté d'appeler l'attention sur le traitement de quelques équations qui sont des cas spéciaux de l'équation

$$\frac{d^2y}{dz^2} = y \cdot \Big(n(n+1) k^2 sn^2 z + \frac{\mu_1(\mu_1+1)}{sn^2 z} + (1-k^2) \frac{\mu_2(\mu_2+1)}{cn^2 z}$$
$$+ (k^2-1) \frac{\mu_3(\mu_3+1)}{dn^2 z} + h \Big).$$

Ainsi je suis parvenu au résultat, que je n'ai pas vu précédemment, que pour l'équation

$$\frac{d^2y}{dz^2} = y\Big(n(n+1) k^2 sn^2 z + (1-k^2) \frac{\mu(\mu+1)}{cn^2 z} + h\Big)$$

il existe une infinité de cas d'intégrations où μ n'est pas un nombre rationnel.

Après cet aperçu sommaire je soumets le mémoire même au jugement bienveillant des géomètres.

1. Considérons de plus près la composition des fonctions en question. Je nomme transcendante du premier ordre une fonction θ définie par une équation de la forme $\varphi(\theta)\, d\theta = \psi(v)\, dv$ où v est fonction algébrique des coefficients de l'équation proposée. Une transcendante du second ordre est définie par une équation de la même forme où v est fonction algébrique des coefficients de l'équation proposée et des transcendantes du premier ordre; et ainsi de suite: une transcendante de l'ordre n est définie par une équation de la forme $\varphi(\theta)\, d\theta = \psi(v)\, dv$ où v est fonction algébrique des coefficients et des transcendantes d'ordres $n-1$, $n-2$, ..., 1.

Nous pouvons maintenant nous faire une idée claire des fonctions en question en disant qu'elles seront des fonctions algébriques des coefficients de l'équation proposée et des transcendantes d'ordres $1, 2 \ldots n$.

Je suppose faites toutes les réductions possibles ou, ce qui est la même chose, je suppose qu'il n'existe aucune relation algébrique entre les transcendantes figurant dans nos fonctions.

2. Avant de commencer la résolution de la question proposée, je vais démontrer un lemme élémentaire.

Soit f une fonction quelconque de $z_1, z_2, \ldots, z_n$. $z_1, z_2, \ldots, z_n$ seront des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ qui seront des fonctions de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ et ainsi de suite. Les variables $v_1, v_2, \ldots, v_r$ du dernier rang seront des fonctions d'une variable unique x. Soit ensuite u une quelconques des variables figurant dans f, et désignons par $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_u$ la dérivée de f, u étant supposé constant; $\frac{\partial f}{\partial u}$ désignera, comme à l'ordinaire, la dérivée partielle de f par rapport à u. Cela posé, on à l'identité

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\right)_u.$$

Ce lemme se démontre très facilement de la manière suivante. On a

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \Sigma \frac{\partial f}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial u}; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_u = \Sigma \frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\frac{\partial z_i}{\partial x}\right)_u.$$

Donc

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\right)_u =$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial z_i}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_i}\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)_u + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial z_n \partial z_i}\left(\frac{\partial z_n}{\partial x}\right)_u\right) + \frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z_i}{\partial u}\right)\right)_u\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_u =$$

$$\Sigma\left(\left(\frac{\partial z_i}{\partial x}\right)_u\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_i}\frac{\partial z_1}{\partial u} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial z_n \partial z_i}\frac{\partial z_n}{\partial u}\right) + \frac{\partial f}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z_i}{\partial x}\right)_u\right).$$

De là résulte que, si l'on suppose que

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z_i}{\partial x}\right)_u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z_i}{\partial u}\right)\right)_u,$$

ou aura aussi

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\right)_u.$$

L'identité

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)_u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_i}{\partial u}\right)\right)_u$$

étant évidente, le lemme est démontré par induction.

3. Je vais maintenant considérer une équation différentielle linéaire, homogène et d'ordre n, dont les coefficients sont des fonctions algébriques de la variable indépendante x. On sait qu'il est facile de substituer à une telle équation un système d'équations simultanées, linéaires, homogènes et du premier ordre. Afin d'obtenir plus de symétrie, je prends le système suivant

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= a_1 y + b_1 z + \ldots + k_1 u,\\ \frac{dz}{dx} &= a_2 y + b_2 z + \ldots + k_2 u,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \frac{du}{dx} &= a_n y + b_n z + \ldots + k_n u,\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

les a, b ..., k étant des fonctions algébriques de x.

Soient

$$\left.\begin{matrix} y_1, & z_1, & \ldots, & u_1,\\ y_2, & z_2, & \ldots, & u_2,\\ y_n, & z_n, & \ldots, & u_n,\end{matrix}\right\} \quad (2)$$

n systèmes d'intégrales particulières dont le déterminant n'est pas égal à zéro. Un système quelconque d'intégrales est représenté par

$$\begin{gathered}\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n,\\ \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_n z_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n,\end{gathered}$$

les α étant des constantes.

Les intégrales (2) sont supposées appartenir à la catégorie des fonctions définie ci-dessus.

La substitution d'un système d'intégrales particulières y_1, z_1, ..., u_1 à une quelconque des équations (1) donne un résultat que j'écris

$$P = 0.$$

Supposons que les transcendantes qui figurent dans y_1, z_1, ..., u_1 soient de l'ordre m au plus. Les transcendantes de l'ordre m se trouvent algébriquement dans P. Les transcendantes d'un ordre moindre que m figurent dans P de deux manières différentes. En premier lieu elles s'y trouvent algébriquement et en second lieu elles se trouvent dans les transcendantes d'ordre supérieur. Remplaçons une transcendante quelconque θ par θ_1 partout où elle figure de la première manière et par θ_2 partout où elle figure de la deuxième.

Par suite de notre supposition qu'il n'existe aucune relation algébrique entre les transcendantes considérées, P doit être identiquement nul considéré comme fonction des θ_1. Il est donc permis de différentier partiellement l'équation $P = 0$ par rapport à un quelconque des θ_1, en considérant comme constantes θ_2 et toutes les autres transcendantes. Mais il est aussi permis de différentier partiellement par rapport à θ lui-même. En effet, la différence des deux résultats est une somme dont tous les termes sont multipliés par des facteurs de la forme $\frac{\partial P}{\partial \omega_1}$, ω étant une transcendante dont l'ordre est supérieur à celui de θ, et ces facteurs sont égaux à zéro comme nous l'avons dit.

Ces remarques faites, nous allons démontrer le théorème suivant: Soit $y, z, \ldots, u$ un système d'intégrales des équations (1). On suppose que $y, z, \ldots, u$ soient des fonctions qui appartiennent à la catégorie en question. Soit θ, définie par l'équation $\varphi(\theta)\, d\theta = \psi(v)\, dv$, une quelconque des transcendantes qui figurent dans $y, z, \ldots, u$. Alors

$$\frac{1}{\varphi(\theta)} \frac{\partial y}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{\varphi(\theta)} \frac{\partial z}{\partial \theta}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\varphi(\theta)} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

forment un système d'intégrales particulières des équations (1). Ce théorème se démontre de la manière suivante: Après la substitution, la première des équations (1) peut s'écrire

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\psi(v)}{\varphi(\theta)} \frac{dv}{dx} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_\theta = a_1 y + b_1 z + \ldots + k_1 u. \quad (3)$$

La différentiation partielle par rapport à θ donne

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \frac{\psi(v)}{\varphi(\theta)} \frac{dv}{dx} - \frac{\partial y}{\partial \theta} \psi(v) \frac{\varphi'(\theta)}{\varphi^2(\theta)} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_\theta =$$
$$a_1 \frac{\partial y}{\partial \theta} + b_1 \frac{\partial z}{\partial \theta} + \ldots + k_1 \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad (4)$$

$v, a_1, b_1 \ldots, k_1$ ne contenant pas θ. Posons maintenant

$$\alpha = \frac{1}{\varphi(\theta)}\frac{\partial y}{\partial \theta}, \ \beta = \frac{1}{\varphi(\theta)}\frac{\partial z}{\partial \theta}, \ldots, \varkappa = \frac{1}{\varphi(\theta)}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Nous aurons

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{\varphi(\theta)}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}\cdot\frac{\psi(v)}{\varphi(\theta)}\frac{dv}{dx} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\right)_\theta\right) - \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\varphi'(\theta)}{\varphi^3(\theta)}\psi(v)\frac{dv}{dx}$$

et des valeurs analogues pour $\frac{d\beta}{dx}, \ldots, \frac{d\varkappa}{dx}$.

Le lemme démontré au paragraphe précedent nous donne

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_\theta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\right)_\theta;$$

donc, après multiplication par $\frac{1}{\varphi(\theta)}$, l'équation (4) peut s'écrire

$$\frac{d\alpha}{dx} = a_1\alpha + b_1\beta + \ldots + k_1\varkappa.$$

Des autres équations (2) on tire de la même manière

$$\frac{d\beta}{dx} = a_2\alpha + b_2\beta + \ldots + k_2\varkappa,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d\varkappa}{dx} = a_n\alpha + b_n\beta + \ldots + k_n\varkappa.$$

Il résulte de ces équations que

$$\frac{1}{\varphi(\theta)}\frac{\partial y}{\partial \theta}, \ \frac{1}{\varphi(\theta)}\frac{\partial z}{\partial \theta}, \ldots, \frac{1}{\varphi(\theta)}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

forment un système d'intégrales particulières.

En revenant à une équation linéaire d'ordre n à coefficients algébriques, on aura ce théorème

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ n intégrales linéairement indépendantes d'une équation linéaire d'ordre n à coefficients algébriques. Si ces intégrales appartiennent à la classe des fonctions en question, on aura, θ désignant une quelconque des transcendantes qui figurent dans les z,

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{1}{\varphi(\theta)}\dfrac{\partial z_1}{\partial \theta} = c_{11} z_1 + c_{12} z_2 + \ldots + c_{1n} z_n, \\
\dfrac{1}{\varphi(\theta)}\dfrac{\partial z_2}{\partial \theta} = c_{21} z_1 + c_{22} z_2 + \ldots + c_{2n} z_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\dfrac{1}{\varphi(\theta)}\dfrac{\partial z_n}{\partial \theta} = c_{n1} z_1 + c_{n2} z_2 + \ldots + c_{nn} z_n,
\end{array}\right\} (5)$$

les c étant constants. Voilà le théorème qui formera la base de la solution.

4. Le théorème démontré au paragraphe précédent conduit facilement à un résultat d'une grande importance.

En posant $\varphi(\theta)\, d\theta = dt$, les équations (5) prennent la forme d'un système d'équations simultanées à coefficients constants. Weierstrass a démontré (Werke, Bd. 2, Pag. 75) qu'il est possible de transformer un tel système en un autre composé de groupes de la forme

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial Z_1}{\partial t} = \lambda Z_1, \\
\dfrac{\partial Z_2}{\partial t} = Z_1 + \lambda Z_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\dfrac{\partial Z_r}{\partial t} = Z_{r-1} + \lambda Z_r,
\end{array}\right\} (6)$$

λ étant une constante. $Z_1, Z_2 \ldots Z_r \ldots$ sont des fonctions de $z_1, z_2 \ldots z_n$ linéaires et à coefficients constants. Le système (6) s'intègre facilement. Désignons par $Z_1^0, Z_2^0, \ldots, Z_r^0$ les fonctions $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ où t est pris égal à zéro et nous aurons

$$Z_1 = Z_1^0 e^{\lambda t},\quad Z_2 = (Z_1^0\, t + Z_2^0)\, e^{\lambda t},\ \ldots,$$

$$Z_r = \left(\frac{Z_1^0}{(r-1)!} t^{r-1} + \frac{Z_2^0}{(r-2)!} t^{r-2} + \ldots + Z_r^0\right) e^{\lambda t},$$

$Z_1^0, Z_2^0, \ldots, Z_r^0$ sont de la même espèce que $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ mais la transcendante θ ne s'y trouve pas.

En substituant à θ successivement toutes les transcendantes du premier ordre, du second ordre etc., nous voyons que les intégrales particulières $z_1, z_2, \ldots, z_n$ se présenteront sous forme de polynômes où les variables sont des fonctions algébriques de x et des fonctions de x des deux formes

$$\int \varphi(\theta)\, d\theta, \quad e^{\lambda \int \varphi(\theta) d\theta},$$

θ étant défini par une équation différentielle de la forme

$$\varphi(\theta)\, d\theta = \psi(x)\, dx,$$

où ψ est une fonction algébrique de x.

De cette forme il résulte que

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}\left(\frac{\partial z_i}{\partial \theta_2}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta_2}\left(\frac{\partial z_i}{\partial \theta_1}\right),$$

θ_1 et θ_2 étant deux quelconques des transcendantes. θ_1 et θ_2 étant définis par les équations

$$\varphi_1(\theta_1)\, d\theta_1 = \psi_1(x)\, dx; \quad \varphi_2(\theta_2)\, d\theta_2 = \psi_2(x)\, dx,$$

l'identité précédente peut aussi s'écrire

$$\frac{1}{\varphi_1(\theta_1)} \frac{\partial}{\partial \theta_1}\left(\frac{1}{\varphi_2(\theta_2)} \frac{\partial z_i}{\partial \theta_2}\right) = \frac{1}{\varphi_2(\theta_2)} \frac{\partial}{\partial \theta_2}\left(\frac{1}{\varphi_1(\theta_1)} \frac{\partial z_i}{\partial \theta_1}\right) \quad (7)$$

$$(i = 1, 2 \ldots n).$$

5. Je suppose maintenant que: $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$, définis par les équations

$$\varphi_i(\theta_i)\, d\theta_i = \psi_i(x)\, dx = dt_i, \quad i = 1, 2 \ldots m,$$

représentent toutes les transcendantes qui figurent dans les intégrales particulières $z_1, z_2, \ldots, z_n$. A chacune de ces transcendantes correspond un système d'équations différentielles de la forme

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial t_i} &= c_{11} z_1 + \ldots + c_{1n} z_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial z_n}{\partial t_i} &= c_{n1} z_1 + \ldots + c_{nn} z_n, \end{aligned}\right\} (8)$$

les c étant des constantes, et tous ces systèmes sont liés ensemble par les identités

$$\frac{\partial}{\partial t_r}\left(\frac{\partial z_i}{\partial t_s}\right) = \frac{\partial}{\partial t_s}\left(\frac{\partial z_i}{\partial t_r}\right), \quad (9)$$

$$(i = 1, 2 \ldots n, \quad r, s = 1, 2 \ldots m).$$

Inversement, n fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_n$ appartenant à la catégorie en question qui satisfont aux systèmes (8) soumis aux conditions (9) peuvent représenter n intégrales particulières d'une équation linéaire d'ordre n à coefficients algébriques.

Pour la démonstration de ce théorème, il faut recourir de nouveau au système des n équations simultanées du premier ordre. Avec les notations employées au paragraphe 3, nous avons maintenant

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{1}{\varphi_r(\theta_r)}\dfrac{\partial y_i}{\partial \theta_r} = \overset{(r)}{c_{1i}} y_1 + \overset{(r)}{c_{2i}} y_2 + \ldots + \overset{(r)}{c_{ni}} y_n = \overset{(r)}{\Psi_i}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\dfrac{1}{\varphi_r(\theta_r)}\dfrac{\partial u_i}{\partial \theta_r} = \overset{(r)}{c_{1i}} u_1 + \overset{(r)}{c_{2i}} u_2 + \ldots + \overset{(r)}{c_{ni}} u_n = \overset{(r)}{\Omega_i},
\end{array}\right\} (10)$$

$$(i = 1, 2 \ldots, n; \quad r = 1, 2 \ldots, m),$$

et nous pouvons donner à l'équation (3) et aux équations analogues la forme suivante

$$\left.\begin{array}{l}
\sum\limits_{r=1}^{m} \overset{(r)}{\Psi_i} \psi_r(x) + \left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x}\right)_{\theta_1 \ldots \theta_m} = a_1 y_i + b_1 z_i + \ldots + k_1 u_i, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}\right\} (11)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Je vais démontrer qu'effectivement les a, les b, ... sont des fonctions algébriques de x. En effet, en différentiant partiellement par rapport à θ_1 la première des équations (11) ($i = 1$) on aura après multiplication par $\dfrac{1}{\varphi_1(\theta_1)}$

$$\Sigma(\overset{(r)}{c}_{11}\overset{(1)}{\Psi}_1+\overset{(r)}{c}_{21}\overset{(1)}{\Psi}_2+\ldots+\overset{(r)}{c}_{n1}\overset{(1)}{\Psi}_n)\psi_r(x)+\frac{1}{\varphi_1(\theta_1)}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)_{\theta_1\ldots\theta_m}$$

$$=a_1\overset{(1)}{\Psi}_1+\ldots+k_1\overset{(1)}{\Omega}_1+\frac{1}{\varphi_1(\theta_1)}\left(\frac{\partial a_1}{\partial\theta_1}y_1+\ldots+\frac{\partial k_1}{\partial\theta_1}u_1\right); \quad (12)$$

mais, comme

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)_{\theta_1\ldots\theta_m}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y_1}{\partial\theta_1}\right)\right)_{\theta_1\ldots\theta_m},$$

il résulte de l'équation

$$\frac{1}{\varphi_1(\theta_1)}\frac{\partial y_1}{\partial\theta_1}=\overset{(1)}{\Psi}_1$$

que

$$\frac{1}{\varphi_1(\theta_1)}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)_{\theta_1\ldots m}=\overset{(1)}{c}_{11}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)_{\theta_1\ldots\theta_m}+\ldots+\overset{(1)}{c}_{n1}\left(\frac{\partial y_n}{\partial x}\right)_{\theta_1\ldots\theta_m}.$$

De plus on a par suite des identités (9)

$$\overset{(r)}{c}_{11}\overset{(1)}{\Psi}_1+\ldots+\overset{(r)}{c}_{n1}\overset{(1)}{\Psi}_n=\overset{(1)}{c}_{11}\overset{(r)}{\Psi}_1+\ldots+\overset{(1)}{c}_{n1}\overset{(r)}{\Psi}_n,$$

donc (12) peut s'écrire

$$\frac{1}{\varphi_1(\theta_1)}\left(\frac{\partial a_1}{\partial\theta_1}y_1+\ldots+\frac{\partial k_1}{\partial\theta_1}u_1\right)=0.$$

De cette équation et des analogues il résulte, le déterminant des y, des z, ..., ne s'annulant pas, que

$$\frac{\partial a_i}{\partial\theta_r}=\ldots=\frac{\partial k_i}{\partial\theta_r}=0$$

ce qui démontre le théorème annoncé.

6. Dans ce qui précède nous avons obtenu quelques renseignements sur la forme des intégrales particulières. Maintenant je vais déterminer complètement cette forme.

Je commence par démontrer qu'il existe au moins une intégrale particulière U qui satisfait à un système d'équations de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t_i}=\lambda_i\,.\,U,\ (i=1,\,2\,\ldots\,m),$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ étant des constantes.

La démonstration de ce théorème présente la plus grande analogie avec la démonstration d'un théorème de M. Picard relatif aux intégrales uniformes des équations linéaires à coefficients doublement périodiques.

$z_1, z_2, \ldots, z_n$ satisfaisant aux équations (8), il résulte de la théorie connue des substitutions linéaires qu'il existe une combinaison linéaire de $z_1, z_2, \ldots, z_n$

$$U = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_n z_n$$

qui satisfait à une équation de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \lambda_1 . U, \quad (1)$$

λ_1 étant une constante qui peut être égale à zéro. Considérons maintenant les intégrales particulières

$$U, \ \frac{\partial u}{\partial t_i}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial t_i^2}, \ \ldots, \ \frac{\partial^r u}{\partial t_i^r}. \quad (2)$$

De (1) on déduit

$$\frac{\partial^r}{\partial t_i^r}\left(\frac{\partial U}{\partial t_1}\right) = \lambda_1 \frac{\partial^r U}{\partial t_i^r},$$

où, d'après les identités (9) § 5,

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial^r U}{\partial t_i^r}\right) = \lambda_1 \frac{\partial^r U}{\partial t_i^r}.$$

Donc les intégrales (2) satisfont toutes à l'èquation suivante

$$\frac{\partial X}{\partial t_1} = \lambda_1 X.$$

L'équation linéaire proposée d'ordre n n'ayant que n intégrales linéairement indépendantes, il existe une relation linéaire à coefficients constants entre

$$U, \ \frac{\partial U}{\partial t_2}, \ \ldots \ \frac{\partial^n U}{\partial t_2{}^n}.$$

Soit μ le plus petit nombre pour lequel on ait

$$\frac{\partial^\mu U}{\partial t_2{}^\mu} = a_0 U + a_1 \frac{\partial U}{\partial t_2} + \ldots + a_{\mu-1} \frac{\partial^{\mu-1} U}{\partial t_2},$$

a_0, a_1, ..., $a_{\mu-1}$ étant des constantes.

Considérons maintenant la substitution linéaire

$$\frac{\partial}{\partial t_2}(U) = \frac{\partial U}{\partial t_2},$$
$$\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\partial U}{\partial t_2}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial t_2{}^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\partial^{\mu-1} U}{\partial t_2{}^{\mu-1}}\right) = a_0 U + a_1 \frac{\partial U}{\partial t_2} + \ldots + a_{\mu-1} \frac{\partial^{\mu-1} U}{\partial t_2{}^{\mu-1}}.$$

En appliquant encore le même théorème sur les substitutions linéaires, on voit qu'il existe une combinaison linéaire de $U, \frac{\partial U}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial^{\mu-1} U}{\partial t_2{}^{\mu-1}}$

$$V = b_0 U + b_1 \frac{\partial U}{\partial t_2} + \ldots + b_{\mu-1} \frac{\partial^{\mu-1} U}{\partial t_2{}^{\mu-1}}$$

qui satisfait à une équation de la forme

$$\frac{\partial V}{\partial t_2} = \lambda_2 . V.$$

De plus on a

$$\frac{\partial V}{\partial t_1} = \lambda_1 . V.$$

En continuant de la même manière par rapport aux transcendantes $\theta_3, \theta_4, \ldots, \theta_m$, on arrive à une fonction U satisfaisant aux équations

$$\frac{\partial U}{\partial t_i} = \lambda_i . U, \quad (i = 1, 2 \ldots m).$$

De ces équations on déduit par intégration

$$U = U_0 e^{\Sigma \lambda_i t_i},$$

U_0 étant une fonction algébrique. Comme on a

$$t_i = \int \psi_i(x)\,dx,$$

ce résultat peut aussi s'écrire

$$U = e^{\int S dx},$$

S étant une fonction algébrique. On voit que la dérivée logarithmique de U est algébrique.

En m'appuyant sur ce théorème, je vais démontrer qu'on peut trouver un système de n intégrales linéairement indépendantes qui par rapport aux équations simultanées (8) § 5 sont partagées en groupes, de telle sorte que, si $u_1, u_2, \ldots, u_r$ forment un groupe, on a

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t_1} = \lambda_1 u_1, && \frac{\partial u_1}{\partial t_i} = \lambda_i u_1, \\
&\frac{\partial u_2}{\partial t_1} = u_1 + \lambda_1 u_2, && \frac{\partial u_2}{\partial t_i} = \overset{(i)}{\lambda}_{21} u_1 + \lambda_i u_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\frac{\partial u_r}{\partial t_1} = u_{r-1} + \lambda_1 u_r, && \frac{\partial u_r}{\partial t_i} = \overset{(i)}{\lambda}_{r1} u_1 + \ldots + \overset{(i)}{\lambda}_{r\,r-1} u_{r-1} + \lambda_i u_r,
\end{aligned}\right\} (3)$$

$$(i = 2, 3 \ldots m),$$

les λ étant des constantes; mais il faut remarquer que les différents groupes peuvent avoir en commun une ou plusieurs de leurs premières intégrales.

Nous démontrerons ce théorème par induction. La démonstration présente une grande analogie avec une démonstration donnée par M. Halphen (Mémoires présentés par divers savants. Tome XXVIII, p. 71) d'un théorème relatif aux intégrales uniformes des équations linéaires à coefficients doublement périodiques.

Avant d'aborder la démonstration même, je vais déterminer les constantes λ des équations (3) de telle sorte que les identités

$$\frac{\partial}{\partial t_r}\left(\frac{\partial u}{\partial t_s}\right) = \frac{\partial}{\partial t_s}\left(\frac{\partial u}{\partial t_r}\right)$$

soient satisfaites.

De l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\left(\frac{\partial u_s}{\partial t_1}\right) = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u_s}{\partial t_i}\right), \quad (E)$$

on déduit

$$\overset{(i)}{\lambda}_{s-1,1} u_1 + \overset{(i)}{\lambda}_{s-1,2} u_2 + \ldots + \overset{(i)}{\lambda}_{s-1,s-2} u_{s-2} + \lambda_i u_{s-1}$$
$$+ \lambda_1 (\overset{(i)}{\lambda}_{s,1} u_1 + \overset{(i)}{\lambda}_{s,2} u_2 + \ldots + \overset{(i)}{\lambda}_{s,s-1} u_{s-1} + \lambda_i u_s) =$$
$$\overset{(i)}{\lambda}_{s,1} \lambda_1 u_1 + \overset{(i)}{\lambda}_{s,2} (u_1 + \lambda_1 u_2) + \ldots + \overset{(i)}{\lambda}_{s,s-1} (u_{s-2} + \lambda_1 u_{s-1})$$
$$+ \lambda_i (u_{s-1} + \lambda_1 u_s);$$

mais $u_1, u_2, \ldots, u_s$ étant linéairement indépendants, il en résulte

$$\overset{(i)}{\lambda}_{s-1,1} = \overset{(i)}{\lambda}_{s,2}, \quad \overset{(i)}{\lambda}_{s-1,2} = \overset{(i)}{\lambda}_{s,3}, \ \ldots, \ \overset{(i)}{\lambda}_{s-1,s-2} = \overset{(i)}{\lambda}_{s,s-1},$$

et maintenant les équations (3) auront la forme

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t_1} = \lambda_1 u_1, && \frac{\partial u_1}{\partial t_i} = \lambda_i u_1, \\
&\frac{\partial u_2}{\partial t_1} = \lambda_1 u_2 + u_1, && \frac{\partial u_2}{\partial t_i} = \lambda_i u_2 + \overset{(i)}{\lambda}_2 u_1, \\
&\frac{\partial u_3}{\partial t_1} = \lambda_1 u_3 + u_2, && \frac{\partial u_3}{\partial t_i} = \lambda_i u_3 + \overset{(i)}{\lambda}_2 u_2 + \overset{(i)}{\lambda}_3 u_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\frac{\partial u_r}{\partial t_1} = \lambda_1 u_r + u_{r-1}, && \frac{\partial u_r}{\partial t_i} = \lambda_i u_r + \overset{(i)}{\lambda}_2 u_{r-1} + \overset{(i)}{\lambda}_3 u_{r-2} + \ldots \\
& && \qquad + \overset{(i)}{\lambda}_{r-1} u_2 + \overset{(i)}{\lambda}_r u_1,
\end{aligned}\right\} (4)$$

$$(i = 2, 3 \ldots m),$$

qui satisfait identiquement aux équations de condition.

Je suppose maintenant que le théorème annoncé soit vrai pour toutes les équations linéaires d'ordre n et je vais démontrer qu'alors il est aussi vrai pour les équations d'ordre $n+1$.

Nous avons vu qu'il existe une intégrale V de l'équation proposée d'ordre $n+1$ dont la dérivée logarithmique est algébrique et qui satisfait aux équations

$$\frac{\partial V}{\partial t_i} = A_i V.$$

Posons

$$u = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{V}\right),$$

y désignant l'intégrale générale de l'équation proposée. Puisque la dérivée logarithmique de V est algébrique, u satisfera à une équation différentielle linéaire, homogène et d'ordre n à coefficients algébriques. Pour cette équation le système d'équations simultanées a la forme (4). $\int \frac{\partial u}{\partial t}\, dx$ étant égal à $\frac{\partial}{\partial t}\int u dx$, on déduit des équations (4)

$$V\frac{\partial}{\partial t_1}\int u_1\, dx = \lambda_1 V\int u_1\, dx + \overset{(1)}{c_1} V,$$

$$V\frac{\partial}{\partial t_1}\int u_2\, dx = \lambda_1 V\int u_2\, dx + V\int u_1 dx + \overset{(1)}{c_2} V,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$V\frac{\partial}{\partial t_1}\int u_r\, dx = \lambda_1 V\int u_r\, dx + V\int u_{r-1} dx + \overset{(1)}{c_r} V,$$

$$V\frac{\partial}{\partial t_i}\int u_1\, dx = \lambda_i V\int u_1\, dx + \overset{(i)}{c_1} V,$$

$$V\frac{\partial}{\partial t_i}\int u_2\, dx = \lambda_i V\int u_2\, dx + \overset{(i)}{\lambda_2} V\int u_1\, dx + \overset{(i)}{c_2} V,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$V\frac{\partial}{\partial t_i}\int u_r\, dx = \lambda_i V\int u_r\, dx + \overset{(i)}{\lambda_2} V\int u_{r-1}\, dx + \dots$$
$$+ \overset{(i)}{\lambda_r} V\int u_1\, dx + \overset{(i)}{c_r} V.$$

Les fonctions $V\int u_i\, dx$ sont des intégrales linéairement indépendantes de l'équation proposée. Je pose

$$y_i = V\int u_i dx,$$

et comme

$$\frac{\partial V}{\partial t_i}\int u dx = A_i V\int u dx,$$

on déduit des équations précédentes

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial t_1} = A_1 V, &&\frac{\partial V}{\partial t_i} = A_i V,\\
&\frac{\partial y_1}{\partial t_1} = (\lambda_1 + A_1) y_1 + \overset{(1)}{c}_1 V, &&\frac{\partial y_1}{\partial t_i} = (\lambda_i + A_i) y_1 + \overset{(i)}{c}_1 V,\\
&\frac{\partial y_2}{\partial t_1} = (\lambda_1 + A_1) y_2 + y_1 + \overset{(1)}{c}_2 V, &&\frac{\partial y_2}{\partial t_i} = (\lambda_i + A_i) y_2 + \overset{(i)}{\lambda}_2 y_1 + \overset{(i)}{c}_2 V,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots, &&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{\partial y_r}{\partial t_1} = (\lambda_1 + A_1) y_r + y_{r-1} + \overset{(1)}{c}_r V, &&\frac{\partial y_r}{\partial t_i} = (\lambda_i + A_i) y_r + \overset{(i)}{\lambda}_2 y_{r-1} + \\
& &&\qquad \dots + \overset{(i)}{\lambda}_r y_1 + \overset{(i)}{c}_r V,
\end{aligned}\right\} (5)$$

Maintenant deux cas différents se présentent. En premier lieu je suppose

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0.$$

Afin de réduire dans ce cas le systéme (5) à la forme indiquée, je pose

$$y'_{r-1} = y_{r-1} + \overset{(1)}{c}_r V_1,\ y'_{r-2} = y_{r-2} + \overset{(1)}{c}_{r-1} V, \dots,\ V' = \overset{(1)}{c}_1 V.$$

On voit, à l'aide des identités (E), que les équations (5) s'écrivent

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V'}{\partial t_1} = A_1 V', &&\frac{\partial V'}{\partial t_i} = A_i V',\\
&\frac{\partial y'_1}{\partial t_1} = A_1 y'_1 + V', &&\frac{\partial y'_1}{\partial t_i} = A_i y'_1 + \overset{(i)}{\mu}_1 V',\\
&\frac{\partial y'_2}{\partial t_1} = A_1 y'_2 + y'_1, &&\frac{\partial y'_2}{\partial t_i} = A_i y'_2 + \overset{(i)}{\mu}_1 y'_1 + \overset{(i)}{\mu}_2 V',\\
&\dots\dots\dots\dots, &&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{\partial y'_r}{\partial t_1} = A_1 y'_r + y'_{r-1}, &&\frac{\partial y'_r}{\partial t_i} = A_i y'_r + \overset{(i)}{\mu}_1 y'_{r-1} + \dots\\
& &&\qquad + \overset{(i)}{\mu}_r y'_1 + \overset{(i)}{\mu}_r V',
\end{aligned}$$

et ce système a la forme indiquée. Ce cas traité, je suppose en second lieu que les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ne soient pas toutes égales à zéro; soit par exemple $\lambda_1 \neq 0$. Dans ce cas je pose

$$y'_1 = k_1 y_1 + V,$$

la constante k devant être determinée de telle sorte qu'on ait

$$\frac{\partial y'_1}{\partial t_1} = \rho y'_1,$$

ρ étant constant. Si $\overset{(1)}{c_1} = 0$, y_1 satisfait déjà à une équation de cette forme; il faut donc supposer $\overset{(1)}{c_1} \neq 0$. On doit avoir

$$k_1((\lambda_1 + A_1)y_1 + \overset{(1)}{c_1} V) + A_1 V = \rho(k_1 y_1 + V),$$

d'où résulte

$$\rho = \lambda_1 + A_1, \; k_1 = \frac{\lambda_1}{c_1^{(1)}}.$$

En introduisant y'_1 à la place de y_1, nous aurons

$$\frac{dy'_1}{dt_1} = (\lambda_1 + A_1)y'_1; \; \frac{dy_2}{dt_1} = (\lambda_1 + A_1)y_2 + \frac{1}{k_1}y'_1 + (\overset{(1)}{c_2} - \frac{1}{k_1})V; \; \ldots$$

je pose ensuite $y'_2 = k_2 y_2 + m_2 V$ et je vais déterminer les constantes k_2 et m_2 de telle sorte que

$$\frac{dy'_2}{dt_1} = \rho y'_2 + y'_1.$$

Pour cela il faut que

$$k_2\Big((\lambda_1 + A_1)y_2 + \frac{1}{k_1}y'_1 + \big(\overset{(1)}{c_2} - \frac{1}{k_1}\big)V\Big) + m_2 A_1 V$$
$$= \rho(k_2 y_2 + m_2 V) + y'_1;$$

donc

$$\rho = \lambda_1 + A_1; \; k_2 = k_1; \; m_2 = \frac{k_1 \overset{(1)}{c_2} - 1}{\lambda_1}.$$

On voit sans difficulté qu'en posant

$$y'_i = k_1 y_i + m_i V,$$

on peut donner à la constante m_i une valeur telle que

$$\frac{\partial y'_i}{\partial t_1} = (\lambda_1 + A_1)y'_i + y'_{i-1}.$$

Après ces transformations le système (5) a pris la forme

$$\frac{\partial V}{\partial t_1} = A_1 V, \qquad \frac{\partial V}{\partial t_1} = A_i V,$$

$$\frac{\partial y'_1}{\partial t_1} = (\lambda_1 + A_1) y'_1, \qquad \frac{\partial y'_1}{\partial t_i} = (\lambda_i + A_i) y'_1 + \overset{(i)}{k_1} V,$$

$$\frac{\partial y'_2}{\partial t_1} = (\lambda_1 + A_1) y'_2 + y'_1, \qquad \frac{\partial y'_2}{\partial t_i} = (\lambda_i + A_i) y'_2 + \overset{(i)}{\mu_2} y'_1 + \overset{(i)}{k_2} V,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial y'_r}{\partial t_1} = (\lambda_1 + A_1) y'_r + y'_{r-1}, \qquad \frac{\partial y'_r}{\partial t_i} = (\lambda_i + A_i) y'_r + \overset{(i)}{\mu_2} y'_{r-1} + \ldots$$
$$+ \overset{(i)}{\mu_r} y'_1 + \overset{(i)}{k_r} V.$$

Je vais démontrer que: $\overset{(i)}{k_1} = \overset{(i)}{k_2} = \ldots = \overset{(i)}{k_r} = 0$. En effet des identités (E) on déduit, en n'écrivant que les termes en V,

$$\ldots (\lambda_1 + A_1) \overset{(i)}{k_1} V = \ldots \overset{(i)}{k_1} A_1 V;$$

donc $\overset{(i)}{k_1} = 0$, λ_1 étant, d'après notre hypothèse, différent de zéro. Supposant $\overset{(i)}{k_1} = \overset{(i)}{k_2} = \ldots = \overset{(i)}{k_{\mu-1}} = 0$, on aura également $\overset{(i)}{k_\mu} = 0$ par suite de l'équation

$$\ldots (\lambda_1 + A_1) \overset{(i)}{k_\mu} V + \ldots + \overset{(i)}{k_{\mu-1}} V = \ldots \overset{(i)}{k_\mu} A_1 V.$$

Maintenant le théorème annoncé est complètement démontré, car il est évident pour une équation linéaire et homogène du premier ordre.

7. Je vais maintenant intégrer ces équations simultanées.

En ne considérant qu'un seul groupe d'intégrales particulières u_1, u_2, ..., u_r, j'écris les équations simultanées correspondantes sous la forme

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_i} = \overset{(i)}{\lambda_1} u_1,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t_i} = \overset{(i)}{\lambda_1} u_2 + \overset{(i)}{\lambda_2} u_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t_i} = \overset{(i)}{\lambda_1} u_r + \overset{(i)}{\lambda_2} u_{r-1} + \ldots + \overset{(i)}{\lambda_{r-1}} u_2 + \overset{(i)}{\lambda_r} u_1.$$

En posant $\frac{u_p}{u_1} = \omega_p$, on en déduit

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_i} = \overset{(i)}{\lambda_1} u_1,$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t_i} = \overset{(i)}{\lambda_2},$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t_i} = \overset{(i)}{\lambda_2} \omega_2 + \overset{(i)}{\lambda_3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial t_i} = \overset{(i)}{\lambda_2} \omega_{r-1} + \overset{(i)}{\lambda_3} \omega_{r-2} + \ldots + \overset{(i)}{\lambda_{r-1}} \omega_2 + \overset{(i)}{\lambda_r}.$$

Par δu je désignerai la différentielle totale de u en considérant comme constant l'x qui entre algébriquement.

On trouve

$$\delta \log u_1 = \sum_1^m \overset{(i)}{\lambda_1} dt_i,$$

donc

$$u_1 = u_1^0 e^{\sum_1^m \overset{(i)}{\lambda_1} t_i},$$

u_1^0 désignant la fonction u_1 dans laquelle on a donné à toutes les transcendantes des valeurs constantes convenables. u_1^0 est donc une fonction algébrique. Comme on a $dt_i = \psi_i(x)dx$, ψ_i étant une fonction algébrique de x, on peut aussi écrire

$$u_1 = e^{T_1},$$

T_1 étant une intégrale abélienne.

On trouve ensuite

$$\delta \omega_2 = \sum_1^m \overset{(i)}{\lambda_2} dt_i.$$

Si l'on pose

$$\sum_1^m \overset{(i)}{\lambda_2} dt_i = \delta T_2,$$

T_2 sera une intégrale abélienne et l'on aura

$$\omega_2 = T_2.$$

Pareillement

$$\delta \omega_3 = T_2 \sum_1^m \overset{(i)}{\lambda_2} dt_i + \sum_1^m \overset{(i)}{\lambda_3} dt_i = T_2 \delta T_2 + \delta T_3,$$

T_3 étant une intégrale abélienne; donc

$$\omega_3 = T_3 + \tfrac{1}{2!} T_2^2 .$$

On peut continuer de la même manière parce que les valeurs des $\dfrac{\partial \omega_p}{\partial t_i}$ satisfont aux identités

$$\frac{\partial}{\partial t_r}\left(\frac{\partial \omega_p}{\partial t_s}\right) = \frac{\partial}{\partial t_s}\left(\frac{\partial \omega_p}{\partial t_r}\right),$$

et ces identités sont justement les conditions d'intégrabilité. De ω_p on déduit u_p par la formule $\omega_p = \dfrac{u_p}{u_1}$.

Voici les premières intégrales particulières. Les T désignent des intégrales abéliennes:

$$\begin{aligned}
u_1 &= e^{T_1},\\
u_2 &= T_2 e^{T_1},\\
u_3 &= \left(T_3 + \tfrac{1}{2!} T_2^2\right) e^{T_1},\\
u_4 &= \left(T_4 + T_2 T_3 + \tfrac{1}{3!} T_2^3\right) e^{T_1},\\
u_5 &= \left(T_5 + T_2 T_4 + \tfrac{1}{2!} T_2^2 T_3 + \tfrac{1}{2!} T_3^2 + \tfrac{1}{4!} T_2^4\right) e^{T_1},\\
u_6 &= \Big(T_6 + T_2 T_5 + T_3 T_4 + \tfrac{1}{2!} T_2 T_3^2 + \tfrac{1}{2!} T_2^2 T_4\\
&\quad + \tfrac{1}{3!} T_2^3 T_3 + \tfrac{1}{5!} T_2^5\Big) e^{T_1}.
\end{aligned}$$

Les autres groupes se traitent par la même méthode.

Les fonctions T ayant remplacé les transcendantes θ, il est clair que $\dfrac{\partial u_r}{\partial T_i}$ sera une intégrale particulière de l'équation proposée. Ce fait se vérifie tout de suite sur les valeurs de $u_1, \ldots, u_6$. On trouve par exemple

$$\frac{\partial u_6}{\partial T_1} = u_6, \frac{\partial u_6}{\partial T_2} = u_5, \frac{\partial u_6}{\partial T_3} = u_4, \frac{\partial u_6}{\partial T_4} = u_3, \frac{\partial u_6}{\partial T_5} = u_2, \frac{\partial u_6}{\partial T_6} = u_1.$$

Il peut arriver que quelques-unes des intégrales particulières soient des fonctions qui n'appartiennent pas à la catégorie que nous considérons. Comme ces intégrales ne peuvent figurer dans les équations simultanées qui correspondent aux intégrales qui appartiennent à la catégorie, ces dernières intégrales ont toujours la forme trouvée.

La forme indiquée est nécessaire, mais est-elle aussi suffisante? ou en d'autres termes, n fonctions de cette forme étant données, est-ce qu'elles satisfont à une équation linéaire d'ordre n à coefficients algébriques? Qu'il en est bien ainsi, c'est ce qui résulte de la proposition du paragraphe 5.

8. Si les coefficients de l'équation proposée, au lieu d'être des fonctions algébriques de x, sont des fonctions algébriques de x et des fonctions arbitraires: $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_p(x)$, on peut demander: quelle est la forme des intégrales particulières quand elles appartiennent à la catégorie des fonctions que nous avons définies au paragraphe 1. On voit sans difficulté qu'il est possible de parvenir à la solution de cette question plus générale par la même méthode. La forme sera la même que dans le cas spécial, les arguments des intégrales abéliennes étant des fonctions algébriques de x et de $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_p(x)$.

9. Je suppose maintenant que les coefficients soient des fonctions rationnelles de la variable indépendante. Alors il n'existe que n éléments d'intégrales linéairement indépendants au voisinage d'un point du plan de la variable indépendante où tous les coefficients sont holomorphes.

Ce fait permet d'obtenir quelques renseignements sur les fonctions algébriques dont dépendent les intégrales abéliennes T. Il semble très difficile d'obtenir des résultats complètement généraux, aussi je ne traiterai que deux cas spéciaux. On a le théorème suivant:

Soit les fonctions e^{T_1}, e^{T_2}, ..., $e^{T_{r+1}}$, où T_1, T_2, ..., T_{r+1}, sont des intégrales abéliennes. Supposons que ces fonctions ainsi que le rapport de deux quelconques d'entre elles ne soient pas algébriques. S'il n'existe aucune relation linéaire à coefficients constants entre e^{T_1}, e^{T_2}, ..., e^{T_r}, une relation de la forme

$$e^{T_{r+1}} = a_1 e^{T_1} + a_2 e^{T_2} + \dots + a_r e^{T_r},$$

où les a sont des constantes, n'est possible que si tous les a sont égaux à zéro à l'exception d'un seul.

En effet, posons $e^{T_i} = u_i$. $u_1, u_2, \ldots, u_r$ étant linéairement indépendants, le déterminant $D\,(u_1, u_2', \ldots, u_r^{(r-1)})$ est différent de zéro. De l'équation

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_r u_r = u_{r+1}$$

on déduit

$$a_i = \frac{D\,(u_1 \ldots \overset{(i-2)}{u_{i-1}}\, \overset{(i-1)}{u_{r+1}}\, \overset{(i)}{u_{i+1}} \ldots \overset{(r-1)}{u_r}\;)}{D\,(u_1 \ldots\ldots u_i^{(i-1)} \ldots\ldots u_r^{(r-1)})} = \frac{M_i}{N}.$$

Maintenant on voit que

$$N = u_1 u_2 \ldots u_r \,.\, B,$$
$$M_i = u_1 \ldots u_{i-1} u_{r+1} u_{i+1} \ldots u_r \,.\, A_i,$$

A_i et B étant des fonctions algébriques.

Donc

$$a_i = \frac{u_{r+1}}{u_i} \cdot \frac{A_i}{B}.$$

Si deux des coefficients a, a_i et a_k, sont différents de zéro, il en résulte

$$\frac{a_i}{a_k} = \frac{u_k}{u_i} \cdot \frac{A_i}{A_k},$$

relation impossible.

Supposons que n intégrales particulières, linéairement indépendantes d'une équation linéaire d'ordre n à coefficients rationnels, aient la forme

$$u_1 = e^{\int \varphi_1 dx},\; u_2 = e^{\int \varphi_2 dx} \ldots u_n = e^{\int \varphi_n dx},$$

les φ étant des fonctions algébriques. De plus je supposerai que ces intégrales ainsi que leurs rapports deux à deux ne soient jamais algébriques.

Soit m l'ordre de l'équation algébrique irréductible $F = 0$ à laquelle satisfait φ_1, et soient $\overset{(1)}{\varphi_1}, \overset{(2)}{\varphi_1}, \ldots, \overset{(m-1)}{\varphi_1}$ les autres racines de cette équation. On voit facilement que les fonctions

$$e^{\int \overset{(1)}{\varphi_1} dx}, \; e^{\int \overset{(2)}{\varphi_1} dx}, \; \ldots, \; e^{\int \overset{(m-1)}{\varphi_1} dx}$$

satisfont ainsi que u_1 à l'équation différentielle proposée.

Il résulte du théorème démontré ci-dessus qu'une relation linéaire entre ces intégrales entraîne l'identité de deux des racines $\varphi_1, \overset{(1)}{\varphi_1}, \ldots, \overset{(m-1)}{\varphi_1}$; mais une telle identité ne peut pas avoir lieu parce que l'équation $F = 0$ est supposée irréductible.

Nous voyons donc que, si une racine d'une équation algébrique irréductible $F = 0$ se trouve parmi les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, toutes les autres racines de la même équation s'y trouvent aussi. Soit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ $(m \leqq n)$ ces racines; les fonctions

$$u_1 = e^{\int \varphi_1 dx}, \; u_2 = e^{\int \varphi_2 dx}, \; \ldots, \; u_m = e^{\int \varphi_m dx},$$

intégrales particulières de l'équation proposée, satisfont à une équation linéaire d'ordre m à coefficients rationnels. L'équation proposée est donc réductible à moins que $m = n$.

Si l'on suppose, comme il est permis de le faire, que le coefficient de la dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ soit égal à zéro, le déterminant $D(u_1, u_2', \ldots, \overset{(n-1)}{u_n})$ est constant, mais ce déterminant s'écrit $u_1 u_2 \ldots u_n . A$, A étant une fonction algébrique. Donc la somme $\int \varphi_1 dx + \int \varphi_2 dx + \ldots + \int \varphi_n dx$ qui s'écrit $\int \Phi dx$, Φ étant rationnel, est égale au logarithme d'une fonction algébrique ou, ce qui est la même chose, le produit $u_1 u_2 \ldots u_n$ est racine d'une fonction rationnelle.

Cette propriété caractérise complètement les équations linéaires en question; c'est ce qu'a démontré M. Halphen (Journ. de Mathém., 1885).

Le produit $u_1 u_2 \ldots u_n$ une fois trouvé, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ peuvent être déterminés par des opérations algébriques.

Ce cas traité, je vais en considérer un autre où les intégrales particulières forme un seul groupe de la forme indiquée au paragraphe 7. Je ne considérerai que le cas où toutes les intégrales abéliennes T_i sont transcendantes. Dans la même supposition relative au déterminant $D(u_1, u'_2, \ldots, u_n^{(n-1)})$ que ci-dessus, on voit que e^{nT_1} est une fonction rationnelle des intégrales abéliennes $T_2, T_3, \ldots$ et de leurs dérivées, d'où résulte, d'après un théorème donné par M. Königsberger (Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen p. 49), que e^{T_1} est algébrique; je la désignerai par S_1. Soit $T_i = \int S_i dx$ $(i = 2, 3, \ldots)$.

S_1 satisfait à une équation algébrique $F = 0$ supposée irréductible; soit (S_1) une autre de ses racines. (S_1) étant comme S_1 intégrale particulière, il faut qu'elle s'exprime linéairement par $u_1, u_2 \ldots$; mais on sait (voir par exemple le mémoire cité de M. Julius Petersen) qu'une combinaison linéaire de $u_2, u_3 \ldots$ ne peut pas être algébrique, donc $(S_1) = cS_1$. Comme (S_1) est une quelconque des racines de $F = 0$, il en résulte que S_1 est racine d'une fonction rationnelle.

Formons maintenant l'équation linéaire d'ordre $n - 1$ aux intégrales particulières

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u_2}{u_1}\right), \ldots, \frac{d}{dx}\left(\frac{u_n}{u_1}\right).$$

Les coefficients de cette équation sont des fonctions rationnelles et les intégrales indiquées ont les valeurs

$$\begin{aligned} v_1 &= S_2, \\ v_2 &= S_3 + S_2 T_2, \\ v_3 &= S_4 + S_2 T_3 + S_3 T_2 + \tfrac{1}{2} T_2^2 S_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

on voit immédiatement qu'elles forment un seul groupe.

Par le raisonnement que nous avons employé ci-dessus nous parvenons au résultat que S_2 est racine d'une fonction rationnelle. Formons l'équation linéaire d'ordre $n - 2$ à coefficients rationnels et aux intégrales particulières

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v_2}{v_1}\right), \ldots, \frac{d}{dx}\left(\frac{v_{n-1}}{v_1}\right).$$

Ces intégrales forment un seul groupe et la première est égale à

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{S_3}{S_2}\right) + S_2;$$

donc cette fonction est racine d'une fonction rationnelle, etc.

On aura une vérification de ce fait que S_2 et $\frac{d}{dx}\left(\frac{S_3}{S_2}\right) + S_2$ sont des racines de fonctions rationnelles si l'on remarque que, la variable indépendante décrivant un chemin fermé quelconque dans son plan, S_2 et S_3 prennent des valeurs de la forme

$$cS_2, \quad c^2 S_3 + d S_2$$

respectivement.

On voit qu'une de ces équations successives étant connue, on peut déterminer une de ses intégrales particulières à l'aide d'opérations purement algébriques, puis calculer l'équation suivante. Ces intégrales trouvées, on aura les intégrales u_1, u_2, ..., u_n par des quadratures successives.

Ces résultats s'étendent d'eux mêmes au cas général où les coefficients sont des fonctions rationnelles de x et des fonctions arbitraires $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_p(x)$. Les irrationnalités algébriques des S restent les mêmes, les arguments étant des fonctions rationnelles de x et de $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_p(x)$.

10. Je vais maintenant faire une étude approfondie des équations linéaires du second ordre.

Une telle équation peut toujours être mise sous la forme

$$\frac{d^2u}{dx^2} = P.u. \quad (1)$$

Je suppose que la fonction P soit rationnelle et je fais abstraction des cas où l'intégrale générale est algébrique.

On voit que les intégrales particulières forment ou deux groupes différents ou un seul groupe, d'où résultent les deux formes

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= e^{\int S_1 dx}, \\ u_2 &= e^{\int S_2 dx}, \end{aligned}\right\} (2) \qquad \left.\begin{aligned} u_1 &= S_1, \\ u_2 &= S_1 \int S_2 dx, \end{aligned}\right\} (3)$$

Pour que l'intégrale générale ne soit pas algébrique, il faut qu'il en soit de même du rapport $\frac{u_1}{u_2}$.

Commençons par la considération de la forme (2). D'après le paragraphe précédent, S_1 et S_2 satisfont à une équation algébrique du second ordre (irréductible ou non). De l'équation

$$u_2 \frac{du_1}{dx} - u_1 \frac{du_2}{dx} = c, \quad (4)$$

il résulte que

$$(S_1 - S_2)\, e^{\int (S_1 + S_2)\, dx} = c. \quad (5)$$

Posons

$$S_1 - S_2 = 2\varphi,$$

φ sera égal à la racine carrée d'une fonction rationnelle ; de (5) on déduit

$$S_1 + S_2 = -\frac{\varphi'}{\varphi},$$

d'où résulte

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} e^{\int \varphi dx}; \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} e^{-\int \varphi dx}. \quad (6)$$

Considérons ensuite la forme (3). L'équation (4) donnera

$$S_1 = \frac{c'}{\sqrt{S_2}};$$

donc on peut écrire

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}; \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \int \varphi dx, \quad (7)$$

φ étant racine d'une fonction rationnelle.

Jusqu'à présent nous avons supposé que l'intégrale générale était une fonction appartenant à la catégorie considérée. Si cela n'est le cas que pour une seule intégrale particulière, celle-ci a la forme

$$u = e^{\int \varphi dx}, \quad (8)$$

φ étant algébrique et je dis que φ sera rationnel. En effet, φ satisfait à une équation algébrique irréductible $F = 0$; soit $\varphi^{(1)}$ une autre racine de cette équation. La fonction

$$u^{(1)} = e^{\int \varphi^{(1)} dx}$$

étant intégrale particulière, il faut qu'on ait $u^{(1)} = cu$, c.-à.-d. $\varphi^{(1)} = \varphi$, donc φ est rationnel. u ne peut pas être algébrique; car si cela avait lieu, l'intégrale générale s'exprimerait à l'aide d'une intégrale abélienne.

Les intégrales données par les formules (6) et (7) peuvent fort bien être algébriques, mais on n'obtient pas de cette manière les intégrales algébriques les plus générales des équations différentielles de la forme (1). Dans tout ce qui suit je ferai abstraction des intégrales algébriques n'ayant pas une des formes indiquées, d'autant plus que de telles intégrales ont été traitées par MM. Schwartz, Halphen et par plusieurs autres géomètres.

11. Les formes nécessaires des intégrales particulières étant obtenues, je peux aborder la question de décider si une équation proposée de la forme (1) est intégrable de cette manière, et, s'il en est ainsi, de déterminer ses intégrales particulières.

Je vais démontrer la proposition suivante:

Pour que l'équation (1) ait ses intégrales de la forme (6) ou de la forme (7), il faut et il suffit que le produit de deux de ses intégrales particulières soit racine d'une fonction rationnelle. Que cette condition est nécessaire, c'est ce que montre immédiatement les formules (6) et (7). Démontrons qu'elle est aussi suffisante. Deux cas se présentent. Ou les deux intégrales sont linéairement indépendantes, ou elles ne le sont pas. Supposons que le premier cas ait lieu, et soient u_1 et u_2 les deux intégrales en question. D'après l'hypothèse on a $u_1 u_2 = \varphi$, φ étant racine d'une fonction rationnelle. On peut écrire

$$u_1 = \psi_1 e^{\int X dx}; \quad u_2 = \psi_2 e^{-\int X dx},$$

X étant une fonction inconnue, ψ_1 et ψ_2 des fonctions algébriques dont le produit est égal à φ. De l'équation

$$u_1 \frac{du_2}{dx} - u_2 \frac{du_1}{dx} = c, \quad (A)$$

on déduit

$$\psi_1 (\psi'_2 - \psi_2 X) - \psi_2 (\psi'_1 + \psi_1 X) = c,$$

d'où résulte

$$X = -\frac{c + \psi_2 \psi'_1 - \psi_1 \psi'_2}{2 \psi_1 \psi_2},$$

donc

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \psi_1 e^{c'\int \frac{dx}{\varphi} - \frac{1}{2}\log\psi_1 + \frac{1}{2}\log\psi_2} = \sqrt{\varphi}\, e^{c'\int \frac{dx}{\varphi}}, \\ u_2 &= \psi_2 e^{-c'\int \frac{dx}{\varphi} + \frac{1}{2}\log\psi_1 - \frac{1}{2}\log\psi_2} = \sqrt{\varphi}\, e^{-c'\int \frac{dx}{\varphi}}, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

φ étant par hypothèse racine d'une fonction rationnelle, on voit maintenant que ce sera la racine carrée d'une telle fonction pour que le coefficient de l'équation différentielle soit rationnel. Nous voyons que u_1 et u_2 ont la forme (6).

Supposons ensuite $u_1^2 = \varphi$, φ étant racine d'une fonction rationnelle. En désignant par X une fonction inconnue, nous pouvons écrire

$$u_1 = \sqrt{\varphi}, \quad u_2 = \sqrt{\varphi}.\int X dx.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (A), nous aurons

$$X = \frac{c'}{\varphi},$$

donc u_1 et u_2 rentrent dans la forme (7).

Quant au cas où (1) n'a qu'une seule intégrale appartenant à la catégorie considérée, je le considérerai plus tard.

La nature des conditions trouvée est telle qu'il sera toujours possible de décider si elles sons satisfaites ou non; mais il vaut la peine de considérer la composition de la fonction φ entrant dans les formules (6) et (7). On verra qu'une équation linéaire de la forme (1) étant donnée, ou peut déterminer les intégrales particulières qu'elle doit avoir si elle est intégrable de la manière considérée, ou du moins on peut en trouver un nombre fini. Ce résultat est particulièrement utile si l'équation proposée contient des paramètres arbitraires.

12. Je commence par supposer que les intégrales particulières aient la forme

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} e^{\int \varphi dx}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} e^{-\int \varphi dx},$$

φ étant la racine carrée d'une fonction rationnelle. L'équation différentielle à laquelle satisfont u_1 et u_2 sera

$$\frac{d^2u}{dx^2} = P.u = \left(\frac{1}{4}\left(\frac{d \log \varphi}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d \log \varphi}{dx^2} + \varphi^2\right). \quad (1)$$

Je pose

$$\varphi(x) = \lambda . \prod_{i=1}^{m} (x - a_i)^{r_i}, \quad (2)$$

λ étant constant et r_i égal à un nombre entier ou à la moitié d'un nombre entier. Si l'équation doit appartenir à la classe considérée par M. Fuchs, il faut que l'intégrale abélienne $\int \varphi dx$ soit ou de la première espèce ou de la troisième aux points singuliers purement logarithmiques. D'où résultent les conditions pour les r

$$r_i \geqq -1, \quad \Sigma r_i \leqq -1.$$

Je ne me bornerai pas aux équations de M. Fuchs, mais on verra que les points dans lesquelles les intégrales particulières sont «régulières» ont une position à part parmi les points singuliers.

La valeur de P sera

$$P = \tfrac{1}{4}\left(\Sigma \frac{r_i}{x - a_i}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{r_i}{(x - a_i)^2} + \lambda^2 \Pi (x - a_i)^{2r_i} \quad (3)$$

et nous en concluons

$$\left.\begin{array}{ll} r_i > -1, & \lim\limits_{x=a_i}(x-a_i)^2 P = \frac{1}{4} r_i^2 + \frac{1}{2} r_i, \\ r_i = -1, & \lim\limits_{x=a_i}(x-a_i)^2 P = -\frac{1}{4} + \lim\limits_{x=a_i}(x-a_i)^2 \varphi^2, \\ \Sigma r_i < -1, & \lim\limits_{x=\infty} x^2 . P = \frac{1}{4}(\Sigma r_i)^2 + \frac{1}{2}\Sigma r_i, \\ \Sigma r_i = -1, & \lim\limits_{x=\infty} x^2 . P = -\frac{1}{4} + \lambda^2. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Si $r_i < -1$, a_i sera pour P un pôle de l'ordre $2r_i$, et si $\Sigma r_i > -1$, le point ∞ sera pour P un pôle de l'ordre $2\,\Sigma r_i$.

On voit que $\lim\limits_{x=a_i}(x-a_i)^2 P$ n'est égal à zéro que si

$$r_i = -1, \ \lim_{x=a_i}(x-a_i)^2 \varphi^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Ces conditions étant satisfaites, P aura une valeur finie au point a_i. En effet, posons

$$\varphi = \frac{R(x)}{x-a_i},$$

R étant holomorphe et différent de zéro au voisinage de a_i. P aura la valeur

$$P = \frac{3}{4}\left(\frac{R'}{R}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{R''}{R} + \frac{-2(x-a_i)R'(x) - R(x) + 4R^3(x)}{4(x-a_i)^2 R(x)}.$$

Les deux premiers termes du second membre sont holomorphes; quant au troisième, son numérateur ainsi que sa dérivée s'annule pour $x = a_i$ par suite de la condition supposée satisfaite

$$\lim_{x=a_i}(x-a_i)^2 \varphi^2 = R^2(a_i) = \tfrac{1}{4};$$

donc P a une valeur finie pour $x = a_i$.

Il suit des équations (4) que $\lim\limits_{x=a_i}(x-a_i)^2 P$ ne peut pas être égal à $-\frac{1}{4}$, λ étant différent de zéro.

Dans ce qui précède la fonction φ était donnée et nous en avons conclu P. Maintenant nous ferons l'inverse: partant de P nous essayerons de construire la fonction φ en nous appuyant sur les résultats précédents.

Soit

$$P = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \sum_{i=1}^{m_1} \frac{A_i^{(1)}}{(x-\alpha_1)^i} + \ldots + \sum_{i=1}^{m_s} \frac{A_i^{(s)}}{(x-\alpha_s)^i} +$$
$$\ldots + \sum_{i=1}^{m_p} \frac{A_i^{(p)}}{(x-\alpha_p)^i}.$$

Si l'équation donnée appartient à la classe de M. Fuchs, on a toujours

$$m_s \leqq 2 \text{ et } \overset{(1)}{A_1} + \overset{(2)}{A_1} + \ldots + \overset{(p)}{A_1} = 0,$$

et la partie entière de P s'évanouit.

Les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont pour la fonction φ des zéros ou des pôles. Quelle est la valeur du degré r_s de multiplicité de α_s par rapport à φ? Si $m_s > 2$, on a $r_s = -\frac{m_s}{2}$.

Soit $m_s = 2$. On a $\lim\limits_{x=\alpha_s} (x-\alpha_s)^2 P = \overset{(s)}{A_2}$. Considérons l'équation

$$\tfrac{1}{4} r^2 + \tfrac{1}{2} r = \overset{(s)}{A_2}. \quad (5)$$

Si les racines de cette équation, multipliées par 2, sont des nombres entiers, deux alternatives vont se présenter. (Dans ce cas $\overset{(s)}{A_2}$ a la forme $n(n+1)$, $2n$ étant un nombre entier.)

Ou on peut prendre pour r_s celle des racines de (5) qui est plus grande que -1 ($\overset{(s)}{A_2}$ étant différent de $-\frac{1}{4}$, une telle racine existe toujours); ou on peut prendre $r_s = -1$, mais alors la condition

$$\lim_{x=\alpha_s} (x-\alpha_s)^2 \varphi^2 = \overset{(s)}{A_2} + \tfrac{1}{4} \quad (6)$$

doit être satisfaite.

Si $\overset{(s)}{A_2}$ n'a pas la forme indiquée, il faudra prendre la seconde alternative.

Il résulte de ce que nous avons vu plus haut que, si les intégrales particulières ont la forme que nous considérons ici, $\overset{(s)}{A_2}$ ne peut pas être égal à zéro sans que $\overset{(s)}{A_1}$ le soit aussi; donc m_s est au moins égal à 2.

Maintenant nous avons déterminé les degrés de multiplicité des α par rapport à φ, ou, du moins, nous avons trouvé un nombre limité de valeurs pour ces quantités; mais la fonction φ n'est pas encore complètement déterminée, car nous avons vu que sous une certaine condition P est fini aux pôles de φ dont l'ordre est égal à 1. Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ ces pôles. En posant

$$G(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_q), \quad (7)$$

nous pouvons écrire

$$\varphi = \frac{\lambda}{G(x)} \cdot \prod_{s=1}^{p} (x-a_s)^{r_s}. \quad (8)$$

Avant tout il faut déterminer le nombre entier q.

Si la partie entière de P ne s'évanouit pas, on aura $\Sigma r_s - q = \frac{k}{2}$.

Si $\lim_{x=\infty} x \,.\, P$ a une valeur finie différente de zéro, $\Sigma r_s - q = -\frac{1}{2}$.

Il faut que les valeurs de q données par ces équations soient des nombres entiers.

Soit enfin $\lim_{x=\infty} x^2 P = B$, B ayant une valeur finie. Considérons l'équation

$$\tfrac{1}{4} r^2 + \tfrac{1}{2} r = B. \quad (9)$$

Si les racines de cette équation multipliées par 2 sont des nombres entiers et si de plus, ρ désignant celle de ces racines qui est plus petite que -1, les nombres $\Sigma r_s - \rho$ et $\Sigma r_s + 1$ sont entiers et positifs, deux cas se présentent; ou on peut prendre $q = \Sigma r_s - \rho$, ou $q = \Sigma r_s + 1$; mais la dernière valeur entraîne la condition $\lambda^2 = B + \frac{1}{4}$. Si $\Sigma r_s - \rho$ ne satisfait pas aux conditions indiquées, il faut prendre $q = \Sigma r_s + 1$, et cette valeur de q doit être entière et positive.

La condition nécessaire et suffisante pour que P soit fini au point β_i étant

$$\lim_{x=\beta_i} (x-\beta_i)^2 \varphi^2 = \tfrac{1}{4},$$

il faut qu'on ait

$$(\beta_i-\beta_1)^2 \ldots (\beta_i-\beta_{i-1})^2 (\beta_i-\beta_{i+1})^2 \ldots (\beta_i-\beta_q)^2 = 4\lambda^2 \prod_{s=1}^{p} (\beta_i-\alpha_s)^{2r_s}, \quad (10)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, q),$$

équations qui déterminent les β, qui doivent être différents entre eux et différents des α.

Dans ce système de q équations, il entre $q+1$ in connus, savoir $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ et λ; donc, en général, les valeurs des β contiendront un paramètre arbitraire. Nous donnerons tout à l'heure une méthode pour trouver le polynôme $G(x)$ (s'il existe).

Je vais ensuite considérer la seconde forme des intégrales particulières

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \int \varphi dx,$$

φ étant racine d'une fonction rationnelle. Dans ce cas l'équation différentielle appartient toujours à la classe de M. Fuchs. On trouve

$$P = \frac{1}{4}\left(\frac{d \log \varphi}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2 \log \varphi}{dx^2}.$$

Posons

$$\varphi = \prod_{i=1}^{n} (x-\alpha_i)^{r_i}, \quad (11)$$

les r étant des nombres rationnels quelconques. La valeur correspondante de P sera

$$P = \frac{1}{4}\left(\Sigma \frac{r_i}{x-\alpha_i}\right)^2 + \Sigma \frac{1}{2} \frac{r_i}{(x-\alpha_i)^2} \quad (12)$$

et nous en concluons

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x=a_i}(x-a_i)^2 P &= \tfrac{1}{4}r_i^2+\tfrac{1}{2}r_i,\\ \lim_{x=\infty} x^2 P &= \tfrac{1}{4}(\Sigma r_i)^2+\tfrac{1}{2}\Sigma r_i.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

On voit que les zéros et les pôles de φ sont, en général, des pôles d'ordre 2 pour P. Pour que P soit fini au point a_i, il faut que $r_i = -2$. Cette condition est nécessaire, cherchons la condition suffisante.

Pour cela je pose

$$\varphi = \frac{H}{(x-a_i)^2},$$

H étant holomorphe est différent de zéro au voisinage de a_i. La valeur de P étant

$$P = \frac{3}{4}\left(\frac{H'}{H}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{H''}{H} - \frac{H'}{H(x-a)},$$

il faut que

$$H'(a_i) = 0. \quad (14)$$

Si $r_s = -2$ mais $H'(a_s) \neq 0$, le point a_s sera pour P un pôle du premier ordre.

Maintenant soit donnée la fonction P

$$P = \sum_{s=1}^{p}\left(\frac{A_i}{(x-a_s)^2}+\frac{B_i}{x-a_s}\right), \quad \Sigma B_i = 0.$$

Désignons par r_s le degré de multiplicité de a_s par rapport à φ. Comme $\lim\limits_{x=a_s}(x-a_s)^2 P = A_s$, r_s satisfait à l'équation

$$\tfrac{1}{4}r_s^2+\tfrac{1}{2}r_s = A_s, \quad (15)$$

donc il faut que toutes ces équations aient des racines rationnelles. On aura deux valeurs pour chacun des nombres r_s.

Si $A_s = 0$, a_s sera par rapport à φ un pôle du second ordre.

La fonction φ n'est pas encore complètement déterminée, car elle peut avoir un certain nombre de pôles du second ordre au voisinage desquels P est holomorphe. Désignons par β_1, β_2, ..., β_q ces pôles et soit

$$(x-\beta_1)^2 (x-\beta_2)^2 \dots (x-\beta_q)^2 = G(x).$$

La fonction φ s'écrit maintenant

$$\varphi = \frac{1}{G(x)} \prod_{s=1}^{p} (x-\alpha_s)^{r_s}.$$

Le nombre q est déterminé par l'équation

$$\tfrac{1}{4}(\Sigma r_i - 2q)^2 + \tfrac{1}{2}(\Sigma r_i - 2q) = \lim_{x=\infty} x^2 . P$$

et, d'après sa signification, il doit être entier et positif. Des conditions (14) on tire les équations

$$\frac{1}{2}\Sigma \frac{r_s}{\beta_i - \alpha_s} = \frac{1}{\beta_i - \beta_1} + \dots + \frac{1}{\beta_i - \beta_{i-1}} + \frac{1}{\beta_i - \beta_{i+1}} + \dots + \frac{1}{\beta_i - \beta_q} \quad (16)$$

par lesquelles les β sont déterminés. Nous donnerons au paragraphe suivant une méthode pour déterminer la fonction $G(x)$ (si elle existe).

13. En posant

$$\prod_{i=1}^{p} (x-a_i)^{r_i} = \frac{1}{R},$$

les deux formes des intégrales particulières seront

$$u_1 = \sqrt{GR}e^{\lambda \int \frac{dx}{GR}}, \quad u_2 = \sqrt{GR}e^{-\lambda \int \frac{dx}{GR}}, \quad (1)$$

$$u_1 = \sqrt{GR}, \quad u_2 = \sqrt{GR} \int \frac{dx}{GR}. \quad (2)$$

Donc la fonction GR satisfait à l'équation linéaire du troisième ordre dont les intégrales particulières sont égales au produit de deux intégrales particulières de l'équation proposée

$$\frac{d^2u}{dx^2} = P.u. \quad (3)$$

Cette équation du troisième ordre se trouve facilement: elle sera

$$\frac{d^3z}{dx^3} - 4\,P\,.\frac{dz}{dx} - 2\frac{dP}{dx} = 0. \quad (4)$$

En posant

$$z = R\,.\,v,$$

v satisfera à l'équation

$$\frac{d^3v}{dx^3}\,.\,R + 3\frac{d^2v}{dx^2}R' + \frac{dv}{dx}(3R'' - PR) + v(R''' - 4PR' - 2P'R) = 0, \quad (5)$$

donc cette équation sera satisfaite par le polynôme $G(x)$. Si u_1 et u_2 sont donnés par la formule (2), $G(x)$ sera un carré parfait.

La fonction R est connue ou, du moins, nous connaissons un nombre limité de fonctions parmi lesquelles R se trouve, et nous pouvons former les équations correspondantes (5). Il résulte du paragraphe 11 que la condition nécessaire et suffisante pour que deux des intégrales de (3) aient une des formes (1) ou (2) est qu'une des équations (5) soit satisfaite par un polynôme entier.

Les deux systèmes d'équations algébriques (10) et (16) du paragraphe précédent font voir qu'en général il sera possible de déterminer $G(x)$, R étant connu, indépendamment de l'équation proposée. Ce fait a de l'importance si l'équation proposée contient des paramètres arbitraires; c'est pourquoi je vais développer une méthode par laquelle cette détermination peut être faite.

Pour cela j'écris la fonction R introduite ci-dessus sous la forme

$$R = \sqrt{\frac{U}{V}},$$

U et V étant des polynômes entiers. Les deux fonctions

$$\sqrt{GR}\,.\,e^{\pm\lambda\int\frac{dx}{GR}}$$

satisfont à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} = Q\,.\,u, \quad (6)$$

où

$$Q = \frac{1}{4}\left(\frac{d\log R}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2\log R}{dx^2} + S,$$

$$S = \frac{4\lambda^2V^2 - UVG'^2 + 2UVGG'' + (U'V - UV')\,GG'}{4\,UVG^2}.$$

Ces formules conviennent aux fonctions

$$\sqrt{GR}, \quad \sqrt{GR}\int\frac{dx}{GR}$$

pour $\lambda = 0$.

Pour que l'équation (3) soit satisfaite par les intégrales (1) ou (2), il faut et il suffit que Q soit identique à P; donc le numérateur de S doit être divisible par G^2. On voit facilement que cette condition s'exprime par les équations (10) ou (16) du paragraphe 12 selon que λ est différent de zéro ou non.

A désignant un polynôme entier, on aura

$$4\lambda^2V^2 - UVG'^2 + 2UVGG'' + (U'V - UV')\,GG' = A\,.\,G^2. \quad (7)$$

Soient u et v les degrés respectifs de U et V. A sera du degré $u+v-2$ si $2v \leqq u+v+2q-2$, mais du degré $2v-2q$ si $2v > u+v+2q-2$ et $\lambda \neq 0$.

De l'équation (7) on déduit par différentiation et élimination de λ

$$2\,UV^2G''' + 3V(U'V - UV')\,G'' + (V(U''V - UV'') - 2V'(U'V - UV') - 2AV)\,G' + (2V'A - VA')\,G = 0. \quad (8)$$ [1].

Cette équation doit déterminer les polynômes G et A. Remarquons que, si V n'est pas constant, la méthode des coefficients indéterminés donnera plus d'équations qu'il n'y a d'inconnues. Si V est constant, le nombre des coefficients de

[1]) Cette équation est l'analogue de (5) relativement à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} = Q\,.\,u.$$

G et de A surpasse d'une unité le nombre des équations déduites de (8) par la méthode des coefficients indéterminés.

Si λ est différent de zéro, il faut que tous les β, racines de l'équation $G = 0$, soient différents entre eux et ils ne doivent satisfaire ni à l'équation $U = 0$ ni à $V = 0$. Si $\lambda = 0$, G sera un carré parfait, mais $G = 0$ ne doit avoir ni des racines multiples d'un degré de multiplicité supérieur à 2 ni des racines satisfaisant à $U = 0$ ou à $V = 0$.

Posons $G = x^q + a_1 x^{q-1} + \ldots + a_{q-1} x + a_q$ et désignons par α le degré de A. Par la méthode des coefficients indéterminés les coefficients de A s'expriment rationnellement en fonction de $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ (si $\alpha > q$ en fonction de $a_1, a_2, \ldots, a_q$) et $a_{\alpha+1} \ldots, a_q$ seront aussi des fonctions rationnelles de $a_1, a_2, \ldots, a_q$.

Dans le cas de $\lambda = 0$ il est possible de donner à l'équation (8) une forme plus simple. En effet, posons $G = H^2$; de (7) on déduit facilement

$$4\,UVH'' + 2\,(U'V - UV')\,H' - AH = 0, \quad (9)$$

équation qui servira à déterminer H et A. On voit que le nombre des coefficients à déterminer égale le nombre des équations que donne la méthode des coefficients indéterminés.

Faisons une dernière remarque. Supposons que les équations (10) du paragraphe 12 que j'écris ainsi

$$4\lambda^2 = \frac{U(\beta_i)}{V(\beta_i)}\, G'^2(\beta_i) \quad (i = 1, 2 \ldots q),$$

déterminent les β en fonction d'un paramètre arbitraire. Faisons varier ce paramètre jusqu'à ce que ou l'équation $G = 0$ obtienne des racines égales ou quelques-uns des β satisfassent à l'équation $U = 0$. Dans ces deux cas λ aura la valeur zéro. Quelles seront pour ces valeurs du paramètre les intégrales particulières? λ étant différent de zéro, elles sont

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} e^{\lambda \int \varphi dx}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} e^{-\lambda \int \varphi dx}.$$

Pour $\lambda = 0$, u_1 et u_2 se confondent en une seule intégrale particulière $\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$; mais de l'équation

$$u_1 \frac{du_2}{dx} - u_2 \frac{du_1}{dx} = c$$

on déduit facilement que $\frac{1}{\sqrt{\varphi}} \int \varphi dx$ satisfera également à l'équation proposée. La même chose résulte aussi de ce que

$$\lim_{\lambda=0} \frac{1}{\lambda} (u_1 - u_2) = \frac{2}{\sqrt{\varphi}} \int \varphi dx.$$

Nous voyons donc que pour $\lambda = 0$ les intégrales particulières prennent la seconde forme. De cette remarque on déduit que, pour les valeurs en question du paramètre, $G(x)$ deviendra un carré parfait à un facteur près qui est un polynôme dont les racines satisfont à $U = 0$ ou à $V = 0$.

Maintenant je suis parvenu au terme de ce que je peux dire en général des deux premières formes. Avant de donner des applications, je traiterai le cas restant où l'équation proposée n'a qu'une seule intégrale particulière appartenant à notre catégorie.

Nous avons vu au paragraphe 10 que l'intégrale en question aura la forme

$$e^{\int \varphi dx},$$

φ étant une fonction rationnelle; donc il faut donner le moyen de reconnaître si une équation linéaire du second ordre admet une intégrale dont la dérivée logarithmique est rationnelle.

La résolution de la question analogue pour l'équation linéaire du troisième ordre a été donnée par M. Picard (Traité d'analyse, Tome III, p. 526) et elle est applicable presque mot à mot au cas qui nous occupe. Néanmoins je l'écris ici pour être complet.

Soit l'équation proposée

$$\frac{d^2u}{dx^2} = P \cdot u,$$

P étant une fonction rationnelle. On peut toujours s'arranger de telle sorte qu'il n'y ait pas dans P de partie entière. Dans la suite je supposerai que P ait cette forme. On doit avoir

$$\frac{d\varphi}{dx} + \varphi^2 = P.$$

Nous voyons facilement qu'un pôle de φ d'ordre r sera pour P un pôle d'ordre $2r$, donc il faut que les ordres des pôles de P soient des nombres entiers pairs. Inversement un pôle d'ordre $2r$ de P sera pour φ un pôle d'ordre r. Les pôles de φ autres que les pôles de P sont nécessairement des pôles simples au résidu 1. Désignons par $R(x)$ la partie de φ relative aux pôles de P; nous aurons

$$\varphi = R(x) + \Sigma \frac{1}{x-\beta},$$

les β n'étant pas des points singuliers de P. On a pour $R(x)$

$$R(x) = \Sigma \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-a},$$

a étant un pôle de P de degré $2k$. Il n'y a pas dans φ de partie entière d'après l'hypothèse faite sur le point à l'infini. Les A étant déterminés de proche en proche par substitution dans l'équation proposée, on pose

$$u = v \,.\, e^{\int R dx},$$

v satisfera à une équation linéaire du second ordre à coefficients rationnels; donc on aura à reconnaître si celle-ci admet un polynôme pour intégrale particulière; ce polynôme sera égal au produit des facteurs $x - \beta$.

15. Je commence les applications par l'équation de Riccati

$$\frac{d^2u}{dx^2} = u\left(\frac{n(n+1)}{x^2} + h\right).$$

Cette équation a été considérée par Liouville (Journ. de Mathém., 1841), qui a démontré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit satisfaite par une fonction appartenant à notre catégorie est que n soit un nombre entier.

On voit immédiatement que l'intégrale générale ne peut pas être algébrique; en effet, le point à l'infini est un point singulier essentiel. Pour la même raison les intégrales ne peuvent pas avoir la forme

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\int \varphi dx,$$

φ étant racine d'une fonction rationnelle. (Nous faisons abstraction du cas de $h = 0$.) Donc il ne reste que les deux cas suivants: ou les intégrales ont la forme

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi}} e^{\int \varphi dx}, \quad \frac{1}{\sqrt{\varphi}} e^{-\int \varphi dx},$$

ou l'intégrale générale n'appartient pas à notre catégorie. Soit la forme

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} e^{\int \varphi dx}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} e^{-\int \varphi dx}.$$

P étant égal à

$$\frac{n(n+1)}{x^2} + h,$$

nous aurons $\lim\limits_{x=0} x^2 . P = n(n+1)$. Supposons que n soit positif, ce qui est toujours possible, $n = -\frac{1}{2}$ étant exclu (§ 11). L'exposant du facteur x dans φ sera alors $2n$ ou -1; mais comme φ a la forme $\frac{x^r}{G}$, P ayant une valeur différente de zéro pour $x = \infty$, il faut prendre $r = 2n$. Le degré de G sera égal à $2n$, donc il faut que $2n$ soit un nombre entier. Maintenant il faut recourir au paragraphe 13. Avec les notations introduites dans ce paragraphe, nous avons $u = 0$, $v = 4n$, et comme $2v > u + v + 2q - 2$, A sera du degré $2v - 2q = 4n$. Formons l'équation linéaire du troisième ordre (8) § 13; elle devient

$$x^{4n+1}\,G''' - 6\,nx^{4n}\,G'' + (2\,n\,(4\,n+1)\,x^{4n-1} - Ax)\,G'$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,(8\,n\,A - xA')\,G = 0. \quad (1)$$

G ne devant pas être divisible par x, il faut que A le soit, et l'on voit facilement que A est divisible par x^{4n-1}, donc

$$A = x^{4n-1}\,(ax + b).$$

De la formule (6) § 13 il résulte

$$h = \frac{A}{4x} = \frac{ax+b}{4\,x};$$

donc $b = 0$, $a = 4\,h$. (1) s'écrit à présent

$$x^2\,G''' - 6\,nxG'' + (2\,n\,(4\,n+1) - ax^2)\,G' + 2\,anxG = 0. \quad (2)$$

En posant $G = a_0 + a_1\,x + \ldots + x^{2n}$, nous aurons

$$(p+1)\,(p-2n)\,(p-4\,n-1)\,a_{p+1} = a\,(p-2\,n-1)\,a_{p-1}. \quad (3)$$

De cette formule récurrente on déduit $a_{2n-1} = a_{2\,n-3} = \ldots = 0$; donc pour que G ne contienne pas x en facteur, il faut que n soit un nombre entier. a_{2n} étant égal à 1, a_{2n-2}, a_{2n-4}, ..., se déterminent en fonction du paramètre arbitraires. De plus il faut établir que $G = 0$ n'a pas de racines égales. Si cela avait lieu, on aurait $\lambda = 0$. La valeur de λ s'obtient en égalant à zéro le coefficient de x^{8n} dans (7) § 13; on aura $4\lambda^2 = a = 4h$; donc si $h \neq 0$, $G = 0$ n'a pas de racines égales. $\left(\text{Pour } h = 0 \text{ les intégrales sont } x^{n+1}, \frac{1}{x^n}.\right)$

Considérons ensuite le cas où l'une des intégrales a la forme

$$e^{\int \psi dx},$$

ψ étant rationnel. En appliquant la méthode du § 14, nous poserons

$$\psi = \frac{A}{x} + B + \Sigma \frac{1}{x-\alpha}.$$

Par substitution de cette valeur dans l'équation

$$\psi' + \psi^2 = \frac{n\,(n+1)}{x^2} + h,$$

on trouve $A = \begin{cases} n+1 \\ -n \end{cases}$; $B = \pm\sqrt{h}$, d'où résulte la forme de u

$$u = x^r e^{\pm\sqrt{h}.x}.z, \quad (4)$$

r désignant $n+1$ ou $-n$ et z étant un polynôme. Transformons l'équation proposée en posant $u = e^{\sqrt{h}.x}.v$,

$$\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}\sqrt{h} = v.\frac{n(n+1)}{x^2}.$$

On voit que, pour satisfaire à cette équation par une fonction de la forme

$$a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \ldots + a_q x^q,$$

il faut prendre $p = 0$, donc le degré de z est égal à n, r étant égal à $-n$, et il faudra que n soit un nombre entier, cas que nous venons de traiter.

16. Supposons comme seconde application que les dégrés de multiplicité $k_1, k_2, \ldots, k_n$ des pôles de P soient tous plus grands que 2 et que la partie entière de P soit du degré k ($\geqq 0$). Dans ces hypothèses il sera impossible que l'intégrale générale appartienne à notre catégorie; donc, s'il y a une intégrale particulière de cette espèce, elle aura nécessairement la forme

$$e^{\int \varphi dx},$$

φ étant rationnel.

Cette proposition a été démontrée par Liouville dans le cas où P est un polynôme (Journ. de Mathém., 1839).

En premier lieu les intégrales n'auront pas la forme

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi}},\ \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\int \varphi dx$$

et l'intégrale générale ne peut pas être algébrique. Cela résulte de ce que les pôles de P sont des points singuliers essentiels pour l'intégrale générale. En second lieu la forme

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi}} e^{\pm \int \varphi dx}$$

est aussi impossible. En effet, on aurait, avec les notations du paragraphe 12, $q = -\frac{k}{2} - \sum_1^n \frac{k_i}{2}$, mais cette valeur serait négative.

17. Les équations de la forme

$$\frac{d^2y}{dz^2} = F \, . \, y,$$

F étant fonction rationnelle d'une fonction elliptique $x(z)$ ont beaucoup occupé les géomètres. Elles peuvent recevoir la forme

$$\frac{d^2u}{dx^2} = Pu,$$

P étant une fonction rationnelle de x. En effet, soit $x(z)$ défini par

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{T(x)} = f(x),$$

$T(x)$ désignant un polynôme du troisième ou du quatrième degré.

Prenons x pour variable indépendante au lieu de z. Nous aurons

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = y \cdot \frac{F(x)}{f^2(x)}$$

et cette équation prend la forme indiquée en posant

$$y = f^{-\frac{1}{2}}(x) \, . \, u, \quad (1)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = u\left(\frac{1}{16}\left(\frac{d \log T}{dx}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{d^2 \log T}{dx^2} + \frac{F(x)}{T(x)}\right) = P \, . \, u. \quad (2)$$

Considérons l'équation

$$\frac{d^2y}{dz^2} = y\left(n(n+1)k^2 sn^2 z + \frac{\mu_1(\mu_1+1)}{sn^2 z} + (1-k^2)\frac{\mu_2(\mu_2+1)}{cn^2 z} \right.$$
$$\left. + (k^2-1)\frac{\mu_3(\mu_3+1)}{dn^2 z} + h\right).$$

T étant égal à $(x^2-1)(k^2x^2-1)$ on aura l'équation transformée

$$\frac{d^2u}{dx^2}=u\left(\frac{1}{16}\left(\frac{d\log T}{dx}\right)^2+\frac{1}{4}\frac{d^2\log T}{dx^2}+\frac{1}{(x^2-1)(k^2x^2-1)}(n(n+1)k^2x^2\right.$$

$$\left.+\frac{\mu_1(\mu_1+1)}{x^2}+(1-k^2)\frac{\mu_2(\mu_2+1)}{1-x^2}+(k^2-1)\frac{\mu_3(\mu_3+1)}{1-k^2x^2}+h\right).$$

Les pôles de P sont situés aux points $0, \pm 1, \pm\frac{1}{k}$; on trouve

$$\lim_{x=0} x^2.P=\mu_1(\mu_1+1),$$

$$\lim_{x=\pm 1}(x\mp 1)^2 P=-\frac{3}{16}+\frac{\mu_2(\mu_2+1)}{4},$$

$$\lim_{x=\pm\frac{1}{k}}\left(x\mp\frac{1}{k}\right)^2 P=-\frac{3}{16}+\frac{\mu_3(\mu_3+1)}{4},$$

$$\lim_{x=\infty} x^2 P=n(n+1).$$

Supposons que n, μ_1, μ_2, μ_3 soient $\geqq -\frac{1}{2}$ ce qui est permis.

Soit à considérer la forme des intégrales

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}e^{\pm\int\varphi dx}. \quad (3)$$

Dans ce cas il faut que n, μ_1, μ_2, μ_3 soient différents de $-\frac{1}{2}$. φ aura la valeur

$$\varphi=\frac{x^{r_0}(x^2-1)^{r_1}(k^2x^2-1)^{r_2}}{(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_q)}, \quad (4)$$

les valeurs de r_0, r_1, r_2, q étant

$$r_0=\begin{cases}2\mu_1\\-1\end{cases};\quad r_1=\begin{cases}\mu_2-\frac{1}{2}\\-1\end{cases};\quad r_2=\begin{cases}\mu_3-\frac{1}{2}\\-1\end{cases};$$

$$q=\begin{cases}r_0+2(r_1+r_2)+2n+2\\r_0+2(r_1+r_2)+1.\end{cases} \quad (5)$$

Les nombres $2r_0, 2r_1, 2r_2$ et q doivent être entiers. Il est clair que les facteurs $x-1$ et $x+1$ figurent dans φ à la même puissance, car l'équation proposée n'est pas changée en substituant $-x$ à x. La même remarque est applicable aux facteurs $kx-1$, $kx+1$.

Si les intégrales doivent avoir la forme

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\int \varphi dx, \quad (6)$$

il faut prendre

$$\varphi = \frac{x^{r_0}(x^2-1)^{r_1}(k^2x^2-1)^{r_2}}{(x-\beta_1)^2 \ldots (x-\beta_q)^2}, \quad (7)$$

où

$$r_0 = \begin{cases} 2\mu_1 \\ -2\mu_1-2 \end{cases}; \quad r_1 = \begin{cases} \mu_2-\frac{1}{2} \\ -\mu_2-\frac{3}{2} \end{cases}; \quad r_2 = \begin{cases} \mu_3-\frac{1}{2} \\ -\mu_3-\frac{3}{2} \end{cases};$$

$$2q = \begin{cases} -2n \\ 2n+2 \end{cases} + r_0 + 2(r_1+r_2). \quad (8)$$

Il faut que r_0, r_1, r_2 soient des nombres rationnels et q un nombre entier positif.

Le cas général conduisant naturellement à des calculs assez longs, je préfère considérer quelques cas spéciaux intéressants. Soit l'équation de Lamé

$$\frac{d^2y}{dz^2} = y\,(n\,(n+1)\,sn^2 z + h),$$

qui a été traitée autrefois par M. Fuchs (Göttinger Nachrichten, 1878) par une méthode analogue.

On a

$$P = \frac{1}{16}\left(\frac{d\log T}{dx}\right)^2 + \frac{1}{4}\,\frac{d^2\log T}{dx^2} + \frac{1}{(x^2-1)\,(k^2x^2-1)}\,(n\,(n+1)\,k^2x^2+h).$$

Considérons la forme (3). μ_1, μ_2, μ_3 étant égaux à zéro, prenons $r_1 = -\frac{1}{2}$, $r_2 = -\frac{1}{2}$, $q = 2n$ (q ne peut jamais avoir la valeur $2(r_1+r_2)+1$ qui est négative pour toutes les valeurs de r_1 et r_2 en question); donc il faut que $2n$ soit un nombre entier. Maintenant nous pouvons écrire

$$\varphi = \frac{1}{G(x)\sqrt{(x^2-1)\,(k^2x^2-1)}}.$$

Posons $G(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \ldots + x^{2n}$. Le degré du polynôme A (voir § 13) sera égal à 2; posons $A = ax^2 + 2bx + c$. L'équation linéaire du troisième ordre (8) § 13 s'écrit

$$(k^2 x^4 - (1+k^2)x^2 + 1)\, G''' + 3\,(2k^2 x^3 - (1+k^2)x)\, G'' \\ + ((6k^2 - a)x^2 - 2bx - (1+k^2+c))\, G' - (ax+b)\, G = 0,$$

et on en tire la formule récurrente

$$(p+1)(k^2 p(p+2) - a)\, a_p - (2p+3)\, b a_{p+1} - (p+2)((1+k^2)(p+2)^2 + c)\, a_{p+2} \\ + (p+2)(p+3)(p+4)\, a_{p+4} = 0, \quad (9)$$

qui pour $p = 2n,\ 2n-1,\ 2n-2$ donne

$$a = 4n(n+1)k^2, \quad b = -2k^2 n\, a_{2n-1};$$
$$c = (4n-1)\, k^2 a_{2n-1} - 4(2n-1)\, k^2 a_{2n-2} - 4(1+k^2)\, n^2.$$

La condition à satisfaire étant

$$A = 4n(n+1)\, k^2 x^2 + 4h,$$

on aura

$$b = 0, \quad a_{2n-1} = 0, \quad h = -(2n-1)\, k^2 a_{2n-2} - (1+k^2)\, n^2.$$

Par substitution des valeurs de a, b, c dans l'équation (9), celle-ci s'écrit

$$(p+1)\, k^2 (p(p+2) - 4n(n+1))\, a_p \\ - (p+2)((1+k^2)(p+2)^2 - 4(2n-1)\, k^2 a_{2n-2} - 4(1+k^2)\, n^2)\, a_{p+2} \\ + (p+2)(p+3)(p+4)\, a_{p+4} = 0.$$

En donnant à p successivement les valeurs $2n-3$, $2n-4$, $\ldots$, 0, on obtient $2n-2$ équations qui peuvent servir à déterminer a_{2n-3}, a_{2n-4}, $\ldots$, a_0; en effet le coefficient de a_p ne s'annule pas pour les valeurs de p en question. On voit que $a_{2n-1} = a_{2n-5} = \ldots = 0$, et que a_{2n-2p} est un polynôme en a_{2n-2} du degré p.

Pour $p = -1$ on aura l'équation de condition

$$-(1 + k^2 - 4(2n-1)\, k^2 a_{2n-2} - 4(1+k^2)\, n^2)\, a_1 + 6\, a_3 = 0.$$

Si n est égal à la moitié d'un nombre entier impair, le premier membre est un polynôme en a_{2n-2} du degré $\frac{2n+1}{2}$; si au contraire n est entier, l'équation de condition est identiquement satisfaite.

Il reste encore à voir si les racines de G ne satisfont pas à l'équation $(x^2-1)(k^2x^2-1) = 0$ ou bien sont égales entre elles. Dans ces deux cas λ a la valeur zéro. De l'équation (7) § 13 on tire

$$4\lambda^2 = a_1^2 - 4a_0a_2 + ca_0^2.$$

Soit n égal à la moité d'un nombre entier. Dans ce cas $a_0 = a_2 = 0$; donc, pour que λ s'annule, il faut que $a_1 = 0$, ce qui entraîne $a_3 = \ldots = a_{2n} = 0$, ce qui est absurde.

Si n est un nombre entier, $a_1 = 0$ et

$$4\lambda^2 = -a_0\left(4a_2 + a_0(4(2n-1)k^2a_{2n-2} + 4(1+k^2)n^2)\right);$$

λ ne s'annule que si l'un ou l'autre des facteurs du second membre est égal à zéro, ce qui donne un nombre limité $(2n+1)$ de valeurs pour a_{2n-2}, c.-à-d. pour h.

Si h a une de ces valeurs exceptionnelles, les intégrales particulières ont la forme $\sqrt{\varphi}$, $\sqrt{\varphi}\int\varphi dx$, et G aura par suite une des quatre formes suivantes, où H désigne un polynôme

$$G = H^2,\ (x^2-1)H^2,\ (k^2x^2-1)H^2,\ (x^2-1)(k^2x^2-1)H^2.$$

Prenons comme exemple le cas de $n = 2$. G sera du quatrième degré

$$g = x^4 + a_2x^2 + a_0$$

et l'on trouve

$$a_0 = \frac{k^2a_2^2 + (1+k^2)a_2 + 1}{k^2};$$

donc

$$G = \frac{1}{k^2}(k^2x^4 + k^2a_2x^2 + k^2a_2^2 + (1+k^2)a_2 + 1).$$

L'équation $\lambda = 0$ s'écrit

$$(\alpha_2+1)\left(\alpha_2+\frac{1}{k^2}\right)\left(\frac{3}{4}k^2\alpha_2^2+(1+k^2)\alpha_2+1\right)\left(\alpha_2+\frac{1+k^2}{k^2}\right)=0,$$

et les valeurs de G correspondantes aux racines de cette équation seront

$$x^2(x^2-1),\ \frac{1}{k^2}x^2(k^2x^2-1),\ \left(kx^2+\frac{1+k^2\pm\sqrt{1-k^2+k^4}}{3k^2}\right),$$
$$(x^2-1)(k^2x^2-1),$$

lesquelles ont les formes indiquées.

Nous voilà maintenant parvenu à la proposition suivante: Les intégrales particulières de l'équation de Lamé ne sont de la forme

$$\sqrt{G(x)}\,.\,e^{\pm\lambda\int\frac{dx}{G(x)\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}}},\quad x = snz,$$

que si $2n$ est un nombre entier positif ou négatif différent de -1. Si $2n$ est un nombre pair, on peut donner à h toutes les valeurs possibles à l'exception de $2n+1$ d'entre elles; mais si $2n$ est impair, les valeurs de h satisfont à une équation algébrique du degré $\frac{2n+1}{2}$. Pour les valeurs exceptionnelles de h correspondant au premier cas les intégrales ont la forme

$$\sqrt{G(x)};\quad \sqrt{G(x)}\int\frac{dx}{G(x)\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}}.$$

Si $2n$ est un nombre impair, la fonction $\frac{G(x)}{x}$ est paire, donc dans ce cas les intégrales particulières sont algébriques.

Dans le cas de la forme (6) des intégrales particulières il faut poser

$$\varphi = \frac{1}{H^2(x)\sqrt{(x^2-1)^r(k^2x^2-1)^s}},$$

r et s ayant les valeurs 1 ou 3 et H étant un polynôme du degré $n+1-\frac{r+s}{2}$. Donc n doit être égal à un nombre entier. On peut démontrer sans difficulté que les valeurs de h correspondant à cette forme sont précisément les valeurs exceptionnelles que nous avons trouvées ci-dessus dans le cas de n égal à un nombre entier.

Nous n'avons pas encore trouvé tous les cas où les intégrales de l'équation de Lamé transformée ont la forme

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi}} e^{\pm \int \varphi dx},$$

car on peut donner à φ non seulement la forme que nous venons de considérer, mais encore les trois formes suivantes

$$\frac{1}{G(x^2-1)\sqrt{k^2x^2-1}}, \quad \frac{1}{G(k^2x^2-1)\sqrt{x^2-1}}, \quad \frac{1}{G(x^2-1)(k^2x^2-1)}.$$

Je ne traiterai ici que la première de ces formes; mais, pour obtenir un meilleur aperçu, je commence par intégrer l'équation correspondant à

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{16}\left(\frac{d\log T}{dx}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{d^2\log T}{dx^2} + \frac{1}{T(x)}\Big(n(n+1)k^2x^2 \\ &\quad + (k^2-1)\frac{\mu(\mu+1)}{x^2-1} + h\Big) \\ &= \frac{1}{16}\left(\frac{d\log T}{dx}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{d^2\log T}{dx^2} \\ &\quad + \frac{n(n+1)k^2x^4 + (h-n(n+1)k^2)x^2 + (k^2-1)\mu(\mu+1) - h}{(x^2-1)^2(k^2x^2-1)} \end{aligned}$$

par des fonctions de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi}} e^{\pm\int\varphi dx} \quad \text{où } \varphi = \lambda \cdot \frac{1}{G(x)(x^2-1)\sqrt{k^2x^2-1}}.$$

Le degré du polynôme $G(x)$ étant égal à $2n-1$, il faut que $2n$ soit un nombre entier. Le polynôme A (voir § 13) sera du degré 4; en posant

$$A = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4,$$

nous aurons

$$Q = \frac{1}{16}\left(\frac{d \log T}{dx}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{d^2 \log T}{dx^2}$$
$$+ \frac{(A_0 + 3k^2)x^4 + A_1 x^3 + (A_2 - 4k^2 - 1)x^2 + A_3 x + A_4 + 2}{4(x^2-1)^2(k^2x^2-1)}.$$

Si G peut se déterminer, la condition nécessaire et suffisante sera que l'équation

$$(A_0 + 3k^2)x^4 + A_1 x^3 + (A_2 - 4k^2 - 1)x^2 + A_3 x + A_4 + 2$$
$$= 4(n(n+1)k^2x^4 + (h - n(n+1)k^2)x^2 + (k^2-1)\mu(\mu+1) - h)$$

soit satisfaite identiquement. D'où résulte

$$A_0 = k^2(2n-1)(2n+3); \quad A_1 = A_3 = 0;$$
$$4h = A_2 - 4k^2 - 1 + 4n(n+1)k^2,$$
$$4(k^2-1)\mu(\mu+1) = A_4 + 4h + 2.$$

Formons l'équation linéaire du troisième ordre (8) § 13; en posant $G(x) = x^{2n-1} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \ldots + a_p x^p + \ldots + a_0$ nous en tirons la formule récurrente

$$(p-1)(k^2(p-3)(p+1) - A_0)a_{p-3} - p((2k^2+1)(p^2-1) + A_2)a_{p-1}$$
$$+ (p+1)((k^2+2)(p+1)^2 - A_4)a_{p+1} - (p+3)(p+2)(p+1)a_{p+3}$$
$$= 0.$$

Pour $p = 2n+2,\ 2n+1,\ 2n,\ 2n-1,\ 2n-2$, elle donnera

$$A_0 = k^2(2n-1)(2n+3),$$
$$A_2 = -4k^2(2n-1)a_{2n-3} - (2k^2+1)(4n^2-1),$$
$$A_4 = -8k^2(2n-3)a_{2n-5} + 8(n-1)k^2a^2_{2n-3}$$
$$+ 8(n-1)(2k^2+1)a_{2n-3} + (k^2+2)(2n-1)^2,$$
$$a_{2n-2} = a_{2n-4} = 0.$$

Donnant ensuite à p successivement les valeurs $2n-3$, $2n-4$, ..., 3, ou trouvera les valeurs de a_{2n-6}, a_{2n-7}, ..., et l'on voit que $a_{2n-6} = a_{2n-8} = \ldots = 0$. Les valeurs des

a seront des fonctions rationnelles de a_{2n-3}, a_{2n-5}. Pour $p = 2, 1, 0$, on aura les équations de condition

$$-2(3(2k^2+1)+A_2)a_1+3(9(k^2+2)-A_4)a_3-60.a_5 = 0,$$
$$-A_2 a_0+2(4(k^2+2)-A_4)a_2-24a_4 = 0,$$
$$(k^2+2-A_4)a_1-6a_3 = 0.$$

Si $2n-1$ est un nombre pair, $a_1 = a_3 = \ldots = 0$, et on n'aura qu'une seule équation entre a_{2n-3} et a_{2n-5}; donc a_{2n-3} est arbitraire. Si au contraire $2n-1$ est impair, $a_0 = a_2 = \ldots = 0$, et on aura deux équations entre a_{2n-3} et a_{2n-5}.

Voyons si $G = 0$ peut avoir des racines égales ou des racines satisfaisant à $T = 0$. Dans chacun de ces cas $\lambda = 0$. De l'équation (7) § 13 on tire

$$4\lambda^2 = -a_1^2+4a_0a_2+A_4a_0^2.$$

Soit $2n-1$ un nombre pair. a_1 étant égal à zéro, $4\lambda^2 = a_0(4a_2+A_4a_0)$, donc λ s'annule pour un nombre fini de valeurs de a_{2n-3}. Soit ensuite $2n-1$ impair. $\lambda = 0$ entraîne $a_1 = a_3 = \ldots = a_{2n-1} = 0$, ce qui est absurde. Maintenant la proposition suivante est complètement démontrée: Les intégrales particulières de l'équation en question n'ont la forme

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}e^{\pm\int\varphi dx};\ \varphi = \frac{\lambda}{G(x)(x^2-1)\sqrt{k^2x^2-1}}$$

que si $2n$ est un nombre entier. Si $2n$ est un nombre pair, h ne peut avoir qu'un nombre limité de valeurs; mais si $2n$ est un nombre impair, on peut prendre h arbitrairement en évitant seulement un nombre limité de valeurs exceptionnelles.

Les valeurs exceptionnelles sont de deux espèces: elles correspondent ou bien à $\lambda = 0$ ou bien à $a_{2n-5} = \infty$. Dans le premier cas les intégrales particulières ont la forme

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\,;\ \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\int\varphi dx;\ \varphi = \frac{\lambda}{G(x^2-1)\sqrt{k^2x^2-1}},$$

et G a une des formes suivantes, H désignant un polynôme,

$$G = H^2,\ (k^2x^2-1)\,.\,H^2,\ (x^2-1)^r\,.\,H^2,\ (x^2-1)^r(k^2x^2-1)\,H,$$

$$r = \left\{\begin{array}{c} -\mu-\frac{1}{2} \\ \mu+\frac{1}{2} \end{array}\right\}$$ (voir § 13, p. 474 et p. 481).

r étant un nombre entier, la valeur de μ sera égale à la moitié d'un nombre entier impair.

Dans le second cas on ne peut pas trouver les intégrales particulières par cette méthode.

Considérons encore une fois les cas où n est égal à la moitié d'un nombre entier impair. Une des constantes h et μ étant arbitraire prenons $\mu = 0$ ce qui correspond à l'équation de Lamé. a_{2n-5} ayant une valeur finie et μ n'étant pas égal à la moitié d'un nombre entier impair nous ne sommes pas dans un cas exceptionnel et nous aurons la proposition:

Si n est égal à la moitié d'un nombre entier impair, les intégrales de l'équation de Lamé

$$\frac{d^2y}{dz^2} = y\,(k^2\,n\,(n+1)\,sn^2\,z + h)$$

ont la forme

$$\sqrt[4]{x^2-1}\,.\,\sqrt{G(x)}\,.\,e^{\pm\lambda\int\frac{dx}{G(x)\,(x^2-1)\,\sqrt{k^2x^2-1}}}\,;\quad x = snz$$

pour un nombre limité de valeurs de h.

On peut trouver des propositions analogues pour les deux autres formes de φ indiquées (pag. 485).

Ayant $4\,\lambda^2 = (\beta_i^2-1)^2\,(k^2\,\beta_i^2-1)\,.\,G'^2\,(\beta_i)$, où β_i est une racine de $G\,(x) = 0$, on voit sans difficulté que les intégrales particulières correspondant à ces formes de φ sont algébriques.